Aula 27 O teorema de Lebesgue - Radon - Nikodym

(continuação)

Teo (L-R-N, caso de medida finita)

Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida finita (a medida de referência) e μ uma outra medida finita em $(X, \mathcal{B})$. Então existe uma (única) decomposição

$$\mu = m_f + \mu_s$$

onde $f \in L^1(m)$, $f \geq 0$ e $\mu_s \perp m$ e $\mu_s < \infty$

(lembre-se que $m_f(E) := \int_E f \, dm$)

prova (existência; do artigo "And still one more proof of the R-N theorem" por Anton Schep, 2003)

O passo principal é o seguinte

Lema Sejam μ, ν medidas finitas em $(X, \mathcal{B})$ t.q. $\mu \le \nu$ em $\mathcal{B}$. Então existe uma função mensurável $g : X \to \mathbb{R}$ t.q.

(em particular, $\mu \ll \nu$)

$0 \le g \le 1$ e $\mu = \nu_g$ (ou seja $\forall E \in \mathcal{B}$ $\mu(E) = \int_E g \, d\nu$)

<u>prova do lema</u> Ideia: encontrar g através de um processo ganancioso. Seja

$$\mathcal{D} = \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ mens.}, \quad 0 \leq f \leq 1$$

$$\text{e } \nu_f \leq \mu$$

$$\Leftrightarrow \int_E f \, d\nu \leq \mu(E) \ \forall E \in \mathcal{B} \}$$

- $f \equiv 0 \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \neq \emptyset$
- Se $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$ então $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{D}$

Por indução, se $f_1 - f_n \in \mathcal{D}$ então $\max\{f_1 - f_n\} \in \mathcal{D}$.

Sejam $A_1 = \{f_1 \geq f_2\}$, $A_2 = \{f_2 > f_1\}$

$A_1 \sqcup A_2 = X$

Dado $E \in \mathcal{B}$,

$$\int_E \max\{f_1, f_2\}\, d\nu = \int_{E\cap A_1} \underbrace{\max\{f_1, f_2\}}_{f_1}\, d\nu + \int_{E\cap A_2} \underbrace{\max\{f_1, f_2\}}_{f_2}\, d\nu$$

$$= \int_{E\cap A_1} f_1\, d\nu + \int_{E\cap A_2} f_2\, d\nu$$

$f_2 \in \mathcal{D}$

$f_1 \in \mathcal{D}$

$$\leq \mu(E\cap A_1) + \mu(E\cap A_2)$$

$$= \mu(E).$$

$\Rightarrow \max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{D}.$

Seja $M := \sup\left\{ \int_X f \, d\nu : f \in \mathcal{D} \right\} < \infty$

Se $f \in \mathcal{D}$, $0 \leq \int_X f \, d\nu \leq \mu(X) < \infty$

$f \geq 0$

Vamos provar que o supremo é atingido:

$\exists\, g \in \mathcal{D}$ t.q. $\int_X f \, d\nu = M$.

$$M = \sup \left\{ \int_X f \, d\nu \ : \ f \in \mathcal{D} \right\}$$

$\forall \ n \geq 1 \quad \exists \ f_n \in \mathcal{D}$ t.q.

$$M \geq \int_X f_n \, d\nu > M - \frac{1}{n}$$

Seja $g_n := \max \{ f_1 \ \_\_\_ \ f_n \}$. Claramente $\forall n \geq 1$,

$g_n \in \mathcal{D} \qquad 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq 1$

Seja $\quad g := \lim_{n \to \infty} g_n = \sup_{n \geq 1} g_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq g \leq 1$

$g_n \geq f_n \quad \Rightarrow \quad M \geq \int_X g_n \, d\nu \geq \int_X f_n \, d\nu > M - \frac{1}{n}$

Então $\int_X g_n \, d\nu \longrightarrow M$

Mas $g_n \nearrow g$

Pelo TCM $\int_X g_n \, d\nu \longrightarrow \int_X g \, d\nu$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow M = \int_X g \, d\nu$ | $\forall E \in \mathcal{B}$

$g \in \mathcal{D}$ já que $g_n \in \mathcal{D} \Rightarrow \int_X g_n \cdot 1_E \, d\nu \leq \mu(E)$

$g_n \cdot 1_E \nearrow g \cdot 1_E \overset{TCM}{\Longrightarrow} \int_X g \cdot 1_E \, d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n 1_E \, d\nu$

$\leq \mu(E)$.

Provamos a existência de uma função mensurável g : $0 \leq g \leq 1$

$$\int_E g \, d\nu \leq \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

e
$$\int_X g \, d\nu = M = \sup \left\{ \int_X f \, d\nu : f \in \mathcal{D} \right\}.$$

Resta provar que $\int_E g \, d\nu = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}$

Suponha por contradição que exista $E \in \mathcal{B}$ t.q.

$$(1) \quad \mu(E) > \int_E g \, d\nu \qquad (0 \le g \le 1)$$

Sejam

$$E_1 := \{x \in E : g(x) = 1\} \, ; \; E_0 = \{x \in E : g(x) < 1\}$$

$$\mu(E_0) + \mu(E_1) = \mu(E) > \int_E g \, d\nu = \int_{E_0} g \, d\nu + \int_{E_1} g \, d\nu$$

$$= \int_{E_1} 1 \, d\nu$$

$$\mu \le \nu$$

$$\Rightarrow \mu(E_1) \le \nu(E_1)$$

$$= \nu(E_1)$$

$$\Rightarrow \mu(E_0) > \int_{E_0} g \, d\nu$$

Então (2) $\mu(E_0) > \int_{E_0} g \, d\lambda = \int_X g \cdot 1_{E_0} \, d\lambda$

$E_0 = \{x \in E : g(x) < 1\}$

$\forall n \geq 1$, seja $F_n := \{x \in E : g(x) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$

$\Rightarrow F_n \uparrow E_0$ quando $n \to \infty$

$\overset{TCM}{\Longrightarrow}$ $\mu(F_n) \longrightarrow \mu(E_0)$

TCM à seq. $\{g \cdot 1_{F_n}\}_{n \geq 0}$ $\int_{F_n} g \, d\lambda \longrightarrow \int_{E_0} g \, d\lambda$

$\mu(E_0) > \int_{E_0} g \, d\lambda$ (2)

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

(3) $$\mu(F_{n_0}) > \int_{F_{n_0}} g \, d\nu$$

em F_{n_0}, $g(x) \leq 1 - \frac{1}{n_0} < 1$

Existe $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{1}{n_0}\right)$ t.q.

$$\mu(F_{n_0}) > \int_{F_{n_0}} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\nu$$

Lado direito

$$= \int_{F_{n_0}} g \, d\nu + \varepsilon \nu(F_{n_0}) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{F_{n_0}} g \, d\nu < \mu(F_{n_0})$$

Temos: $F_{n_0} \in \mathcal{B}$ onde $g(x) \le 1 - \frac{1}{n_0}$

$0 < \varepsilon < 1/n_0$ t.q.

$$\mu(F_{n_0}) > \int_{F_{n_0}} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\nu$$

$g + \varepsilon 1_{F_{n_0}} \le 1$

mas

$g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}$ não

nec. $\in \mathcal{D}$

<u>Afirmação 1</u> $\exists\, F \subset F_{n_0}$, $\nu(F) > 0$

t.q. $g + \varepsilon 1_F \in \mathcal{D}$

Neste caso (da afirmação) $\int_X \left(g + \varepsilon 1_F\right) d\nu =$

$$= \int_X g\, d\nu + \varepsilon \nu(F) = M + \varepsilon \nu(F) > M \ ↯$$

Resta provar a afirmação | $F_{n_0} \in \mathcal{B}$

$$(4) \quad \mu(F_{n_0}) > \int_{F_{n_0}} (g + \varepsilon 1_{F_{n_0}})\, d\nu$$

$$\Rightarrow \exists\, F \subset F_{n_0},\ \nu(F) > 0 \ \text{ t.q. }$$

$$g + \varepsilon 1_F \in \mathcal{D} \quad \left(\Leftrightarrow \int_E (g + \varepsilon 1_F)\, d\nu \leq \mu(E) \quad \forall E\right)$$

Por contradição, senão, temos que

$$\forall F \subset F_{n_0},\ \nu(F) > 0,\ g + \varepsilon 1_F \notin \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \exists\, E \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \int_E (g + \varepsilon 1_F)\, d\nu > \mu(E))$$

Então denotando por $G := E \cap F$, segue que

$$G \subset F \, (\subset F_{n_0}) \text{ e}$$

$$\int_G (g + \varepsilon 1_F) \, d\nu > \mu(G)$$

<u>Afirmação 2</u> (válida, por enquanto) $\exists \{G_n : n \geq 1\}$ t.q.

$$F_{n_0} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} G_n \text{ e}$$

$$\frac{\int_{G_n} (g + \varepsilon 1_F) \, d\nu > \mu(G_n) \quad \forall n \geq 1}{\int_{\cup G_n} (g + \varepsilon 1_F) \, d\nu > \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} G_n\right)} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \int_{F_{n_0}} \left(g + \varepsilon 1_F\right) d\lambda > \mu(F_{n_0}) \qquad (5)$$

Mas

$$(4) \quad \underline{\mu(F_{n_0})} > \int_{F_{n_0}} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\lambda$$

$$(F_{n_0} \supset F) \qquad \geq \int_{F_{n_0}} \left(g + \varepsilon 1_F\right) d\lambda$$

$$\underset{(5)}{>} \underline{\mu(F_{n_0})} \quad ⚡$$

contradição.

Prova da afirmação 2

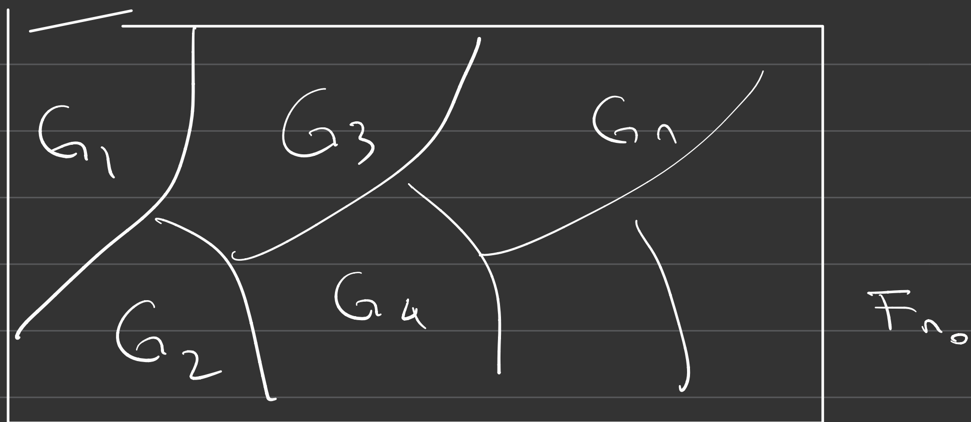
Hipótese $\forall F \subset F_{n_0}, \lambda(F)>0, \exists G \subset F$ t.q.

$$\int_G (g+\varepsilon 1_F)\, d\lambda > \mu(G)$$

Conclusão existe uma partição

$$F_{n_0} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} G_k \quad \text{t.q.}$$

$$\int_{G_k} (g+\varepsilon 1_F)\, d\lambda > \mu(G_k) \qquad \forall k \geq 1$$



A hipótese $\Rightarrow$ $\forall F \subset F_{n_0}$ existem $G \subset F$ e $m \in \mathbb{N}$

t. q.

$$\int_G (g + \varepsilon 1_F)\, d\lambda > \mu(G) + \frac{1}{m} \qquad (*)$$

- Começamos com $\overset{\overset{\overline{F}}{\cap}}{\overline{F}_{n_0}} \subset \overline{F}_{n_0}$;

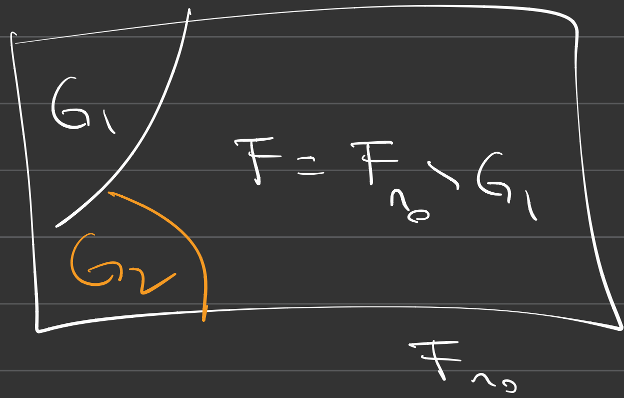
existem $G \subset \overline{F}_{n_0}$, $m \geq 1$ t.q.

$$\int_G \left(g + \varepsilon 1_{\overline{F}_{n_0}}\right) d\lambda > \mu(G) + \frac{1}{m}$$

Selecione o par (G_1, m_1) com m_1 o mínimo possível

$$\int_{G_1} \left(g + \varepsilon 1_{\overline{F}_{n_0}}\right) d\lambda > \mu(G_1) + \frac{1}{m_1}$$

•



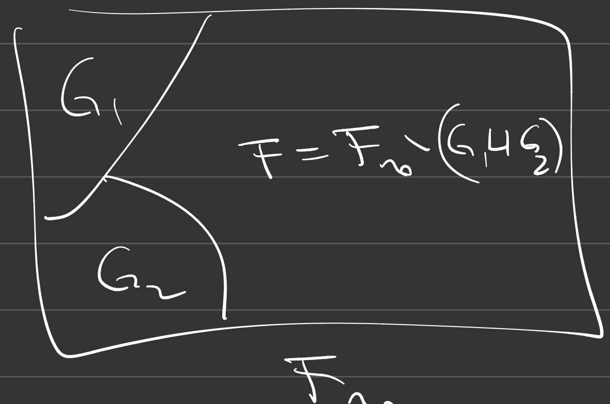
existem pares (G, m) com $G \subset F$ e

$$\int_G (g + \varepsilon 1_{F_{n_0}})\, d\nu > \mu(G) + \frac{1}{m}$$

Selecione (G_2, m_2) com

m_2 o mínimo possível.

$$\int_{G_2} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\nu > \mu(G_2) + \frac{1}{m_2}$$



Selecione (G_3, m_3) t.q.

$$\int_{G_3} (g + \varepsilon 1_{F_{n_0}})\, d\lambda > \mu(G_3) + \frac{1}{m_3}$$

m_3 mínimo possível.

...

Obtemos uma sequência

$k \geq 1 \qquad (G_k, m_k)$

G_k disjuntos

$m_k \geq 1$

t.q.

$\forall k \geq 1$

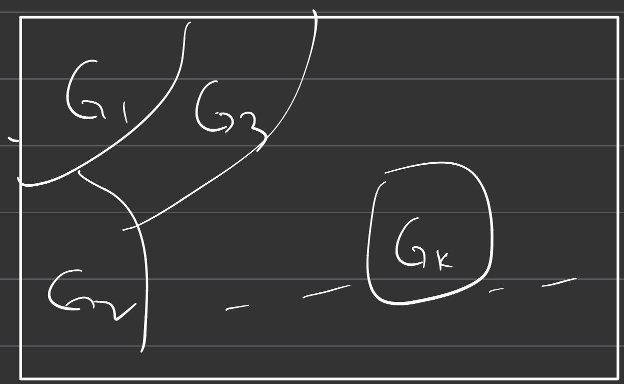
$$\int_{G_k} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\lambda > \mu(G_k) + \frac{1}{m_k} \qquad (+)$$

$$\boxed{\text{Seja } G_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} G_k}$$

$$\underbrace{\int_{G_0} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\lambda}_{\leq \int_{G_0} 1 \, d\lambda = \lambda(G_0) \leq \lambda(X) < \infty} > \mu(G_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty \quad \Rightarrow \frac{1}{m_k} \to 0$$

$$\Rightarrow m_k \to \infty$$

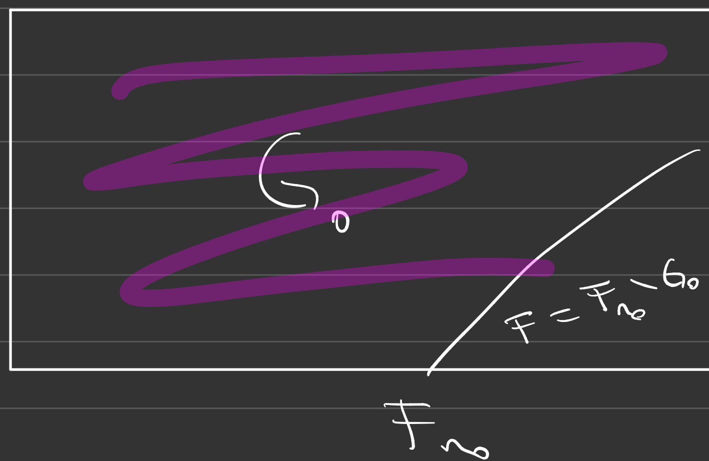


F_n

$$G_0 = \bigsqcup_{k\geq 1} G_k \subset F_n$$

G_0 deve ser F_n.

Se não,



Aplicando a hipótese mais uma vez, para

$$F = F_{n_0} \setminus G_0$$

$$\exists\, (G', n'),\quad n' \geq 1$$

$$G' \subset F \quad \text{t.q.}$$

$$\int_{G'} \left(g + \varepsilon 1_{F_{n_0}}\right) d\Omega > \mu(G') + \frac{1}{n'}$$

$$G' \subset F = F_{n_0} \setminus G_0 \subset F_{n_0} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_k) \Rightarrow (G', n')$$

é uma opção no k-ésimo passo.

$\Rightarrow \quad m' \geq m_x$ (= o mínimo possível dentre todas as escolhas)

$\forall x$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

$\Rightarrow m' = \infty$ ctr.

$\square$

prova do teo de L-R-N (usando o lema)

Objetivo: encontrar $f \in L^1(m)$, $f \geq 0$

t.q. $\mu = m_f + \mu_s$

Seja $\nu := \mu + m \Rightarrow \mu \leq \nu$, então o

lema é aplicável e $\exists$ g mens, $0 \leq g \leq 1$

t.q. $\mu(E) = \int_E g \, d\nu \quad \forall E \in \mathcal{B}$.

Portanto

$$\lambda = \mu + m$$

- $$\mu(E) = \int_E g \, d\lambda \qquad \forall E \in \mathcal{B}$$

$$\lambda(E) = \int_E 1 \, d\lambda$$

$$\mu(E) = \lambda(E) - m(E) = \int_E 1 \, d\lambda$$

$$\Rightarrow \quad m(E) = \int_E (1-g) \, d\lambda$$

Seja $Z := \{g = 1\} \Rightarrow m(Z) = \int_Z (1-g) \, d\lambda = 0$

$\circ \quad \nu = \mu + m$

$$\int_E 1 \, d\mu = \mu(E) = \int_E g \, d\nu = \int_E g \, d\mu + \int_E g \, dm$$

$$\Rightarrow \int_E (1-g) \, d\mu = \int_E g \, dm$$

$$\Leftrightarrow \int_X (1-g) \, 1_E \, d\mu = \int_X g \cdot 1_E \, dm \qquad \forall E \in \mathcal{B}$$

Pela linearidade do integral

se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$

Segue que

$$\int_X (1-g)s \, d\mu = \int_X g \, s \, dm \qquad \forall s \text{ simples } s \geq 0$$

Usando o TCM, a afirmação acima vale para toda função mens. sem sinal

Logo,

$$\int_X (1-g)\varphi \, d\mu = \int_X g \cdot \varphi \, dm \qquad (**)$$

$$\forall \varphi \text{ mens}, \ \varphi \geq 0.$$

Fixe $E \in \mathcal{B}$. Para todo $n \geq 1$, seja

$$\varphi := (1 + g + \cdots + g^n)\, 1_E \quad \text{mens}, \quad \varphi \geq 0$$

Usando (**), temos

$$\int_X \underbrace{(1-g)(1+g+\cdots+g^n)}_{= 1 - g^{n+1}} 1_E \, d\mu = \underbrace{\int_X g\,(1+g+\cdots+g^n) 1_E \, d\mu}_{LD}$$

$$\| $$

$$\underbrace{\int_E (1 - g^{n+1})\, d\mu}_{LE}$$

$$LE = \int_E (1-g^{n+1})\, d\mu$$

$$0 \leq g \leq 1$$

$$g^{n+1}_{(x)} \longrightarrow 0 \quad \text{se } g(x) < 1$$

$$\{g=1\} = Z$$

$$\mu(Z) = 0$$

$$= \cancel{\int_{E\cap Z} (1-\underbrace{g^{n+1}}_{1-0=0})\, d\mu} + \int_{E\cap Z^c} (1-g^{n+1})\, d\mu$$

$$\cancel{} = 0$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\int_{E\cap Z^c} 1 \, d\mu = \mu(E\cap Z^c)$$

$$L\Delta = \int_E g(1 + \dots g^n)\, dm$$

$$Z = \{g = 1\} \quad m(Z) = 0$$

$$= \int_{E \cap Z^c} g(1 + g + \dots + g^n)\, dm =$$

$$= \int_{E \cap Z^c} \frac{g(1 - g^{n+1})}{(1 - g)}\, dm$$

$e \in Z^c$, $g < 1$

$$\Rightarrow 1 + g + \dots + g^n = \frac{1 - g^{n+1}}{1 - g}$$

$$\Big\downarrow \text{TCM}$$

$$\int_{E \cap Z^c} \frac{g}{1 - g}\, dm$$

$$= \int_{E\cap Z^c} \frac{g}{1-g}\, dm = \int_E \underbrace{\frac{g}{1-g}\cdot 1_{Z^c}}_{f}\, dm$$

Seja $f := \frac{g}{1-g} 1_{Z^c}$

Provamos que o LD $= \underline{\int_E f\, dm}$

LE = LD