Aula 28 Construção abstrata de medidas

Lembre-se a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$:

- Consideramos caixas, conjuntos elementares, para os quais já tivemos uma medida natural (o volume)

$$E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k \qquad B_i \text{ são caixas}$$

$$m(E) = |B_1| + \dots + |B_k|$$

"pré-medida em $\mathbb{R}^d$".

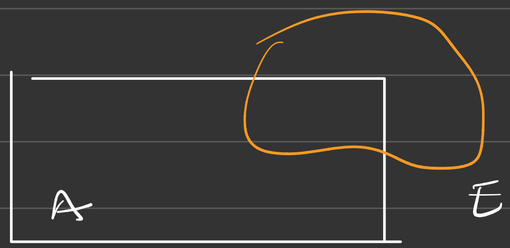
- Definimos um conceito mais primitivo de medida: "a medida exterior" de Lebesgue.

Para todo $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \right.$$

$$\left. E_k \text{ conjuntos elementares} \right\}$$

• Definimos "conjuntos mensuráveis" via o primeiro princípio de Littlewood, que é equivalente ao princípio de Carathéodory:



$E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável sse $\forall A \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

Neste caso, definimos $m(E) = m^*(E)$

Então, m é uma medida na σ-álgebra de conjuntos mensuráveis $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ $\supset \sigma\{\text{conjuntos elementares}\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Esta construção pode ser abstraída.

Medida exterior e o teorema de extensão de Carathéodory

Definição Dado um conjunto X, uma função

$$\mu^*: 2^X \to [0,\infty]$$

é chamada de medida exterior se

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(2) se $E \subset F$ então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$

(3) $$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

<u>ex</u> A medida exterior de Lebesgue m^* em $\mathbb{R}^d$ é uma medida exterior.

<u>Definição</u> Seja μ^* uma medida exterior em X.

Um conjunto $E \subset X$ é chamado de

mensurável (à Carathéodory) com respeito a μ^*

Se $\forall A \subset X$, tem-se

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

<u>Obs</u> Se $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ é mensurável.

Teo (de extensão de Carathéodory)

Seja μ^* uma medida exterior em X e seja

$$\mathcal{B} = \{ E \subset X : E \text{ mensurável à Carathéodory com respeito a } \mu^* \}$$

Então,

- $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra

- $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\mu(E) := \mu^*(E)$ é uma medida.

Então, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida.

Pré-medidas e o teorema de extensão de Kolmogorov

Def Uma família $\mathcal{B}_0 \subset 2^X$ é chamada de álgebra booleana se

- $\emptyset \in \mathcal{B}_0$
- se $E \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}_0$
- se $E, F \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{B}_0$

Obs Se $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana, e se $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{B}_0$ então $E_1 \cup \cdots \cup E_k$, $E_1 \cap \cdots \cap E_k \in \mathcal{B}_0$

Obs Uma álgebra booleana $\mathcal{B} \subset 2^X$ é uma σ-álgebra sse $\forall \{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ de conjuntos disjuntos,

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}.$$

Ex $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) = \{E \subset \mathbb{R}^d : E$ elementar ou E^c elementar$\}$

é uma álgebra booleana.

Definição Seja $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana.

Uma função $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$ t.q.

- $\mu_0(\phi) = 0$

- Se $E_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$, disjuntos e se $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}_0$, então

$$\mu_0\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

é chamada de pré-medida em X.

Obs Se μ_0 é uma pré-medida em $(X, \mathcal{B}_0)$, então

(1) se $E, F \in \mathcal{B}_0$, $E \subset F \Rightarrow \mu_0(E) \leq \mu_0(F)$

(2) Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_0$ e se $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_0$

então $$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

Ex A medida elementar em $\mathbb{R}^d$ é uma pré-medida.

$m : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$,

$$m(E) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} |B_j| & \text{se } E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k \\ +\infty & \text{se } E^c \text{ é elementar} \end{cases}$$

Def Uma pré-medida μ_0 em $(X, \mathcal{B}_0)$ é σ-finita se $\exists\ A_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$ t.q.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e $\mu_0(A_n) < \infty \quad \forall n \geq 1.$

__Teo__ (de extensão de Hahn-Kolmogorov)

Sejam X um conjunto, $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana em X e $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,\infty]$ uma pré-medida em $\mathcal{B}_0$.

Então, μ_0 pode ser estendida para uma medida μ em $\sigma(\mathcal{B}_0)$.

Se μ_0 é σ-finita, a extensão μ é única.

Logo, $(X, \sigma(\mathcal{B}_0), \mu)$ é um espaço de medida.

ex No espaço $\mathbb{R}^d$

$$\sigma\left(\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

a σ-álgebra de Borel

A medida elementar é σ-finita: $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n]^d$

$m\left([-n,n]^d\right) < \infty \quad \forall n \geq 1$

A única extensão da medida elementar é, portanto, a medida de Lebesgue em

$$\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right).$$

Ideia (da prova do teo de H-K.)

Existência Temos uma pré-medida

$$(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$$

- Definimos $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ por

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n, \; E_n \in \mathcal{B}_0 \right\}.$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Seja $\mathcal{B} = \{ E \subset X : E$ mens. à Carathéodory com respeito a $\mu^* \}$

Pelo teo de extensão de Carathéodory,

$\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e

$\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ é uma medida.

- Resta provar que

(1) $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, ou seja, $\forall E \in \mathcal{B}_0$, E é mens. à Carathéodory.

Isso implicará $\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}$.

(ii) $\mu_0(E) = \mu^*(E) = \mu(E)$

$\forall E \in \mathcal{B}_0$

Aplicações importantes do teo de H-K

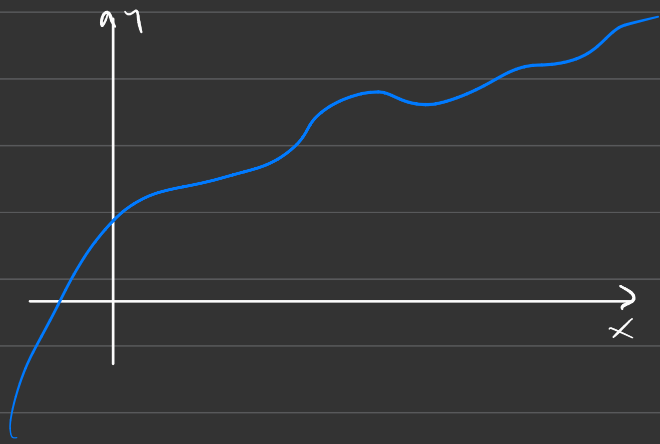
- a medida de Lebesgue-Stiljes em $\mathbb{R}$
- a medida produto (de Bernoulli)
- a medida de Markov

$\Big\}$ probabilidades

A medida de Lebesgue-Stieltjes em $\mathbb{R}$

Teo

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e de classe C^1. (ex: $F(x) \equiv x$)



Então $\exists !$ medida m_F em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q.

$$m_F([a,b]) = F(b) - F(a)$$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

Além disso, $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$m_F(E) = \int_E F' \, dm \,,$$

$m_{F'}$

ou seja, $dm_F = F' \, dm$

Ademais

$$\int \varphi \, dm_F = \int \varphi \cdot F' \, dm$$

para toda função mensurável $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty]$.

<u>Ideia da prova</u> definir uma pré-medida

$$m_F : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$m_F(I) := F(b) - F(a) \quad \text{se } I = [a,b],\ (a,b),\ [a,b) \text{ ou } (a,b].$$

$$m_F(-\infty, b] = F(b) - \inf_x F(x)$$

$$m_F(a, \infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) - F(a)$$

Se $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ intervalos

então $m_F(E) = m_F(I_1) + \dots + m_F(I_k)$.

Resta verificar que m_F é uma pré-medida em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ e aplicar Hahn-Kolmogorov.

A medida produto (finito)

Sejam $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$ dois espaço mensuráveis.

$E \times F$ é chamado de cilindro

$E \in \mathcal{B}_X$, $F \in \mathcal{B}_Y$

A σ-álgebra produto, denotada por

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \overset{\text{def}}{=} \sigma\{\text{cilindros}\}.$$

Seja $\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i \ , \ E_i \in \mathcal{B}_X \right.$
$\left. F_i \in \mathcal{B}_Y \right\}$

$\hookrightarrow$ álgebra booleana.

Evidentemente, $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$.

<u>ex</u> $\left(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})\right) \times \left(\mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})\right) =$

$$= \left(\mathbb{R}^{d_1+d_2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})\right)$$

<u>Teo</u> (de existência da medida produto)

Sejam $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ dois espaços de medida σ-finita.

Então $\exists!$ medida $\mu_X \times \mu_Y$ em $(X \times Y, \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ t.q.

$$\mu_X \times \mu_Y (E \times F) = \mu_X(E) \cdot \mu_Y(F).$$

Ideia da prova

cilindros $E \times F$, $E \in \mathcal{B}_X$, $F \in \mathcal{B}_Y$

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i \ : \ E_i \in \mathcal{B}_X, \ F_i \in \mathcal{B}_Y \right\}$$

álgebra booleana.

Seja $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$

$$\mu_0 \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_X(E_i) \cdot \mu_Y(F_i)$$

é uma pré-medida; aplique Kolmogorov $\boxtimes$

O teorema de Riesz-Markov-Kakutani

Seja X um espaço topológico localmente compacto

(i.e. $\forall x \in X \; \exists V_x$ vizinhança compacta de X).

<u>Ex</u>: $\mathbb{R}^d$, qualquer espaço compacto

Seja $\mathcal{B}(X)$ = a σ-álgebra de Borel.

Definição Uma medida μ em $(X, \mathcal{B}(X))$ é chamada de medida de Radon (ou regular)

se:

- $\mu(K) < \infty \quad \forall K$ compacto
- $\forall E \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E \text{ compacto} \}$$

regularidade interior

- $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \supset E \text{ aberto} \}$

regularidade exterior.

<u>ex</u> A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ é uma medida de Radon.

Dada uma medida μ de Radon em $(X, \mathcal{B}(X))$,

Considere a integral com respeito a μ.

$$f \longmapsto \int_X f \, d\mu$$

é uma operação linear e positiva

Se $f \geq 0$ então $\int_X f \, d\mu \geq 0$

Seja $C_c(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f$ contínua, com suporte compacto$\}$
topológico

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{ x \in X : f(x) \neq 0 \}}$$

<u>Obs</u>

$$C_c(X) \subset L^1(X, \mu)$$

Então

$$\underset{\text{espaço vetorial}}{C_c(X)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_X f \, d\mu$$

é um funcional linear positivo.

Teo (de R-M-K)

Seja X um espaço topológico localmente compacto

e seja $I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$

um funcional linear $\left(I(af+bg) = aI(f) + bI(g) \right)$

positivo $\left(f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0 \right)$

Então, $\exists!$ medida de Radon μ em $(X, \mathcal{B}(X))$

t.q. $I(f) = \int_X f \, d\mu$.