AULA 1: O PROBLEMA DE MENSURABILIDADE. MEDIDA ELEMENTAR.

Já estamos familiarizados com um outro tipo de integral, a integral de Riemann. No entanto, a integral de Riemann é insuficiente na análise matemática.

Exemplo 1. Considere a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função *não* é integrável à Riemann. De fato, dada qualquer partição

$$\mathcal{P} = (0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1)$$

de $[0,1]$, como cada subintervalo $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ contém pontos racionais e irracionais, as somas de Darboux superior e inferior correspondentes são

$$\overline{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} |I_j| = 1\,,$$

$$\underline{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = 0\,.$$

Além disso, considere uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ e define, para todo $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência de funções $\{f_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$f_1 \leq f_2 \leq \ldots f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$

$f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in [0,1]$

$f_n(x)$ é integrável à Riemann para todo $n \geq 1$ (já que f_n possui um número *finito* de pontos de descontinuidade),

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0\ .$$

Contudo, a função f, que é o *limite* (pontual, monótono) da sequência de funções integráveis a Riemann $\{f_n\}_{n \geq 1}$, não é integrável à Riemann.

Portanto, precisamos de um conceito de integração mais flexível, que é fechado com respeito a tais limites.

A teoria de Jordan-Riemann-Darboux

O problema de mensurabilidade. O espaço de referência é $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \ldots$). O objetivo é definir um conceito de medida "física" aplicável a uma ampla coleção de conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$, a ser chamados de *conjuntos mensuráveis.*

Os conjuntos do espaço euclidiano mais fáceis de medir são *caixas* retangulares, para quais o volume (respectivamente, o comprimento em dimensão um ou área em dimensão dois) representa uma medida física natural.

Mais geralmente,

(i) O que significa para um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ ser mensurável?

(ii) Se E é mensurável, qual é a sua medida?

(iii) Que propriedades básicas (ou axiomas) devem ser satisfeitas por uma medida? Por exemplo, se E é a reunião disjunta entre dois conjuntos mensuráveis E_1 e E_2, qual deveria ser a relação entre suas medidas?

Começamos com a medida de Jordan, relacionada à integral de Riemann; depois disso apresentaremos um conceito de medida mais refinado, a medida de Lebesgue, que nos permitirá definir a integral de Lebesgue.

Medida elementar. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, i.e. um intervalo do tipo $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ ou (a, b). Define o seu comprimento por $|I| := b - a$.

Uma *caixa* em $\mathbb{R}^d$ é um produto cartesiano

$$B = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$$

de intervalos limitados. Define seu volume por $|B| := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_d|$.

Definição 1. Um *conjunto elementar* $E \subset \mathbb{R}^d$ é qualquer união *finita* de caixas

$$E = B_1 \cup \ldots \cup B_n \,.$$

Exercício 1. Se $E, F \subset \mathbb{R}^d$ são conjuntos elementares, então $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$, $E \bigtriangleup F$ são conjuntos elementares também.

Além disso, qualquer translação

$$E + a := \{x + a \colon x \in E\} \,,$$

onde $a \in \mathbb{R}^d$ e E é um conjunto elementar, também é um conjunto elementar.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar qualquer.*

(i) E pode ser escrito como uma união disjunta *de caixas.*

(ii) Se $E = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ e $E = B'_1 \sqcup \ldots \sqcup B'_m$ são duas representações de E como uniões disjuntas de caixas, então

$$|B_1| + \ldots + |B_n| = |B'_1| + \ldots + |B'_m| \,.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova em dimensão $d = 1$. O argumento em dimensão maior é similar (exercício).

(i) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto elementar, isto é, uma união finita de intervalos limitados $I_1, \ldots, I_n$. Então

$$\begin{aligned} E &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots \cup I_n \\ &= I_1 \sqcup (I_2 \setminus I_1) \sqcup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \sqcup \ldots \sqcup (I_n \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_{n-1})) \,. \end{aligned}$$

Então basta provar a seguinte afirmação: dados quaisquer intervalos limitados I, I_1, $\dots$, I_k, o conjunto

$$I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$$

pode ser descrito como uma união finita de intervalos disjuntos.

Observe que a interseção entre um intervalo limitado e um intervalo qualquer é sempre um intervalo limitado. Além disso, o complemento de um intervalo limitado é uma união de dois intervalos disjuntos (não limitados).

Então, como

$$I \setminus I_1 = I \cap I_1^{\complement}$$

temos que $I \setminus I_1$ é uma união de dois (então finita) intervalos disjuntos e limitados.

Além disso,

$$I \setminus (I_1 \cup I_2) = I \cap (I_1 \cup I_2)^{\complement} = I \cap I_1^{\complement} \cap I_2^{\complement} = \left(I \cap I_1^{\complement}\right) \cap I_2^{\complement}$$

que, pelo argumento anterior, será uma união finita (de no máximo quatro) intervalos limitados disjuntos.

Por indução, concluímos que o conjunto $I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$ pode ser descrito como uma união finita de intervalos limitados disjuntos.

(ii) Vamos usar um argumento de discretização: dado qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$,

$$|I| = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N}, \tag{1}$$

onde

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} := \left\{ \frac{k}{N} \colon k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De fato, se $I = (a, b)$, para todo $N \geq 1$ sejam $k_N, l_N \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{k_N}{N} \leq a < \frac{k_N + 1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{l_N}{N} < b \leq \frac{l_N + 1}{N}.$$

Note que $\frac{k_N}{N} \to a$ e $\frac{l_N}{N} \to b$ quando $N \to \infty$.

Segue que

$$(a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{k_N + 1}{N}, \ldots, \frac{l_N}{N} \right\},$$

então

$$\#\left((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = l_N - k_N.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N} &= \frac{\#\left((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N} \\ &= \frac{l_N - k_N}{N} = \frac{l_N}{N} - \frac{k_N}{N} \to b - a = |I|, \end{aligned}$$

mostrando (1).

Seja $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$. Como os intervalos I_1, $\dots$, I_n são disjuntos, dado qualquer $N \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) &= \#\left((I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \\ &= \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) + \ldots + \#\left(I_n \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados acima por N, passando ao limite quando $N \to \infty$ e usando (1), concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N} = |I_1| + \ldots + |I_n| \ .$$

A expressão

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N}$$

não depende da representação $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ de E como uma união disjunta de intervalos limitados, provando assim o nosso lema. $\square$

O lema anterior nos permite definir a medida de um conjunto elementar.

Definição 2. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar, e seja $E = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ uma representação qualquer como união disjunta de caixas. Definimos a medida de E por

$$\mathrm{m}(E) := |B_1| + \ldots + |B_n| \ .$$