AULA 2: MEDIDA ELEMENTAR (CONTINUAÇÃO)

Lembrando que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *elementar* se pode ser escrito como união finita de caixas $E = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Além disso, sempre é possível tomar caixas de forma que esta união seja disjunta. Considere o conjunto $\mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ elementar } \right\}$ e vamos definir a *medida elementar* como sendo a função

$$\begin{array}{rccc} m\colon & \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \longmapsto & \mathrm{m}(E) \end{array},$$

em que $\mathrm{m}(E) := |B_1| + \ldots + |B_n|$.

Teorema 1. *(Propriedades básicas da medida elementar) Sejam $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$ e m a medida elementar definida acima. São válidas*

(1) (POSITIVIDADE) $\mathrm{m}(E) \geqslant 0$, *para todo* E *e* $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.
(2) (ADITIVIDADE FINITA) *Se* $E \cap F = \emptyset$ *então* $\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.
Por indução, $\mathrm{m}(E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k) = \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_k)$.
(3) Se E *é uma caixa então* $\mathrm{m}(E) = |E|$.
(4) Se $E \subset F$ *então* $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$.
(5) (MONOTONICIDADE) *Se* $E \subset F$ *então* $\mathrm{m}(E) \leqslant \mathrm{m}(F)$.
(6) (SUBADITIVIDADE FINITA) $\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.
(7) (INVARIÂNCIA À TRANSLAÇÃO) $\mathrm{m}(E + a) = \mathrm{m}(E)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. $(1), (2), (3), (7)$ são evidentes e $(5), (6)$ estão na Lista 1.

Vamos provar (4): Como $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, em que E e $F \setminus E$ são conjuntos elementares. Assim, segue por (2) que

$$\mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F \setminus E)$$

Portanto, $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$ $\square$

Teorema 2. *(Unicidade da medida elementar) Suponha que $\lambda\colon \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\lambda(E) \geqslant 0$, *para todo* $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
- $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$, *para todo* $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
- $\lambda(E + a) = \lambda(E)$, *para todo* $a \in \mathbb{R}^d$ *e* $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
- $\lambda\left([0,1]^d\right) = 1$.

Então, $\lambda \equiv \mathrm{m}$.

Demonstração. (em dimensão 1)
Passo 1. Provaremos que $\lambda([0, x]) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Veja que $\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, logo

$$\begin{array}{rrl} & \lambda\left[\frac{1}{2}, 1\right) & = \lambda\left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow & \lambda\left[0, 1\right) & = \lambda\left[0, \frac{1}{2}\right) + \lambda\left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ \Rightarrow & 1 & = 2\,\lambda\left[0, \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Portanto, $\lambda\left[0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Mais geralmente,

$$\begin{aligned}\left[0,\frac{1}{n}\right)+\frac{k}{n} &= \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\\ \Rightarrow\qquad \lambda\left[0,\frac{1}{n}\right) &= \lambda\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\\ \Rightarrow\qquad \lambda\left[0,1\right) &= 1.\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever o intervalo $\lambda\left[0,1\right)$ como

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)=n\,\lambda\left[0,\frac{1}{n}\right).$$

Substituindo, temos

$$\lambda\left[0,\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\lambda\left[0,\frac{k}{n}\right)=\lambda\left[0,\frac{1}{n}\right)+\lambda\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)+\ldots+\lambda\left[\frac{k+1}{n},\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}.$$

Seja $x\in\mathbb{R}_+$e veja que para todo $n\geqslant 1$ existe $k_n\geqslant 1$ de modo que

$$\frac{k_1}{n}\leqslant x<\frac{k_1+1}{n},$$

ou seja, $\dfrac{k_1}{n}\to x$ quando $n\to\infty$. Logo, temos que $\left[0,\frac{k_1}{n}\right)\subset[0,x)\subset\left[0,\frac{k_1+1}{n}\right)$ e então

$$\begin{aligned}\lambda\left[0,\frac{k_1}{n}\right) &\leqslant \lambda\left[0,x\right) \leqslant \lambda\left[0,\frac{k_1+1}{n}\right)\\ \Rightarrow\qquad \frac{k_1}{n} &\leqslant \lambda\left[0,x\right) \leqslant \frac{k_1}{n}+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{k_1}{n}$ e $\dfrac{k_1}{n}+\dfrac{1}{n}$ convergem à x quando $n\longrightarrow\infty$, temos que $\lambda\left[0,x\right)=x$.

Passo 2. Seja $[a,b)\subset\mathbb{R}$ com $a<b$. Então podemos escrever $[a,b)=[0,b-a)+a$. E mais,

$$\lambda\left[a,b\right)=\lambda\left[0,b-a\right)=b-a.$$

Se considerarmos $E\subset F$ então podemos escrever $F=E\sqcup(F\setminus E)$. Assim, pela aditividade de λ segue que $\lambda(F)=\lambda(E)+\lambda\left(F\setminus E\right)$ e como $\lambda\left(F\setminus E\right)\geqslant 0$ concluímos que $\lambda(E)\leqslant\lambda(F)$. Observe que para todo $n\geqslant 1$ temos $\{0\}\subset\left[0,\frac{1}{n}\right)$ e pela observação acima segue que

$$0\leqslant\lambda\{0\}\leqslant\lambda\left[0,\frac{1}{n}\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Logo, $\lambda\{0\}=0$ e como $\{x\}=\{0\}+x$ segue que $\lambda\{x\}=0$. Desta forma, concluímos que para todo intervalo limitado I, $\lambda\left(I\right)=|I|$.

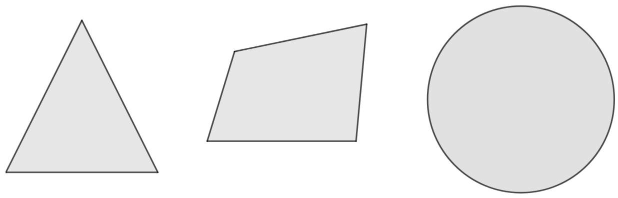
Passo 3. Seja $E\in\mathcal{E}\left(\mathbb{R}\right)$ e $E=I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n$ e como λ é aditiva concluímos que

$$\lambda\left(E\right)=\lambda\left(I_1\right)+\ldots+\lambda\left(I_n\right)=|I_1|+\ldots+|I_n|=\mathrm{m}\left(E\right).$$

$\square$

MEDIDA DE JORDAN

Os conjuntos abaixo e o conjunto de Cantor (em $\mathbb{R}$) não são elementares.



Estederemos o conceito de medida a uma família maior de conjuntos, que contém esses exemplos.

Definição 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Definimos a

- *medida interior de Jordan* de E por

$$\mathrm{m}_{*,J}(E) \coloneqq \sup\left\{\mathrm{m}(A) : A \subset E, A \text{ elementar}\right\}.$$

- *medida exterior de Jordan* de E por

$$\mathrm{m}^{*,J}(E) \coloneqq \inf\left\{\mathrm{m}(B) : E \subset B, B \text{ elementar}\right\}.$$

Observe que $0 \leqslant \mathrm{m}_{*,J}(E) \leqslant \mathrm{m}^{*,J}(E) < \infty$, para qualquer $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado.

Definição 2. Se $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) =: \mathrm{m}(E)$, então dizemos que E é um conjunto *Jordan mensurável*. Neste caso, $\mathrm{m}(E)$ é a *medida de Jordan* de E.

Observação 1. (1) Se E é um conjunto elementar, então E é Jordan mensurável.
(2) Se $\mathrm{m}^{*,J}(E) = 0$ então E é Jordan mensurável e $\mathrm{m}(E) = 0$.

Teorema 3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) E é Jordan mensurável;
(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existem conjuntos elementares A e B tais que

$$A \subset E \subset B \text{ e } \mathrm{m}(B \setminus A) < \varepsilon;$$

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe A conjunto elementar tal que $\mathrm{m}^{*,J}(A \Delta E) < \varepsilon$.

Demonstração. A equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ está na Lista 1.

Vamos mostrar $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Inicialmente suponha que E é Jordan mensurável, logo pela definição $\mathrm{m}_{*,J}(E)\, \mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}(E)$. Fixe $\varepsilon > 0$ e veja que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \inf\{\mathrm{m}(B) : B \supset E \text{ elementar}\}.$$

Portanto, existe $B \supset E$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(E) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Além disso, temos também pela definição que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(E) = \sup\{\mathrm{m}(A) : A \subset E \text{ elementar}\}.$$

Ou seja, existe $A \subset E$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(A) > \mathrm{m}(E) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Desta forma, temos que $A \subset E \subset B$ em que A e B são conjuntos elementares e por (**??**) e (**??**) segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,(B \setminus A) &= \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) \\ &\leqslant \mathrm{m}(E) + \tfrac{\varepsilon}{2} - \mathrm{m}(E) + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixe $\varepsilon > 0$ e suponha que existem A e B conjuntos elementares de modo que $A \subset E \subset B$ e $\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B \setminus A) < \varepsilon$. Veja que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant \mathrm{m}^{*,J}(E) - \mathrm{m}_{*,J}(E) < \varepsilon.$$

Portanto, $\mathrm{m}^{*,J}(E) - \mathrm{m}_{*,J}(E) = 0$, ou seja, E é Jordan mensurável. □

Um truque comum em Análise

- Para provar que $a = 0$ (em que $a \geqslant 0$) é suficiente mostrar que

$$a < \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

- Para provar que $x = y$ mostre que

$$|y - x| = 0 \Longleftrightarrow |y - x| < \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

ou

$$\begin{cases} x \leqslant y \iff x < y + \varepsilon, & \forall\, \varepsilon > 0. \\ y \leqslant x \iff y < x + \varepsilon, & \forall\, \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Exercício 1. Prove que a região delimitada por um triângulo é Jordan mensurável e também prove a fórmula da área (ou seja, a medida de Jordan) de um triângulo.