AULA 3: MEDIDA DE JORDAN (CONTINUAÇÃO)

Teorema 1. *(Propriedades básicas da medida de Jordan)*

(1) Se E e F são Jordan mensuráveis então $E \cup F$, $E \cap F$, $F \setminus E$, $E \setminus F$ e $E \Delta F$ são Jordan mensuráveis.
(2) (POSITIVIDADE) $\mathrm{m}(E) \geqslant 0$.
(3) (ADITIVIDADE) *Se* $E \cap F = \emptyset$ *então* $\mathrm{m}(E \sqcup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.
(4) (INVARIÂNCIA À TRANSLAÇÃO) $\mathrm{m}(E + a) = \mathrm{m}(E)$, *para todo* $a \in \mathbb{R}^d$.
(5) (MONOTONICIDADE) *Se* $E \subset F$ *então* $\mathrm{m}(E) \leqslant \mathrm{m}(F)$.
(6) (SUBADITIVIDADE) $\mathrm{m}(E \sqcup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.

Demonstração. Faremos a prova do item (2), os demais são deixados como exercícios.

Inicialmente mostraremos que se E e F são Jordan mensuráveis então $E \cup F$ também é Jordan mensurável. Fixe $\varepsilon > 0$ e veja que existem A e B conjuntos elementares tais que

$$A \subset E \subset B, \quad \mathrm{m}(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

E para F, existem C e D conjuntos elementares tais que

$$C \subset E \subset D, \quad \mathrm{m}(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Deste modo, observe que $A \cup C$ e $B \cup D$ são conjuntos elementares tais que $A \cup C \subset E \cup F \subset B \cup D$. E mais,

$$(B \cup D) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus A) \setminus (D \setminus C)$$

Logo, por (1) e (2) temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\left((B \cup D) \setminus (A \cup C)\right) &\leqslant \mathrm{m}\left((B \setminus A) \cup (D \setminus C)\right) \\ &\leqslant \mathrm{m}(B \setminus A) + \mathrm{m}(D \setminus C) \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $E \cup F$ é Jordan mensurável.

Agora, vamos considerar E e F Jordan mensuráveis disjuntos. Queremos mostrar que

$$\mathrm{m}(E \sqcup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F).$$

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Por um lado, temos que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(E) = \sup\left\{\mathrm{m}(A) : A \subset E, A \text{ elementar}\right\}.$$

Logo, existe $A \subset E$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(A) > \mathrm{m}(E) - \varepsilon.$$

Similarmente, existe $C \subset F$ conjunto elementar tal que

$$\mathrm{m}(C) > \mathrm{m}(F) - \varepsilon.$$

Como $E \cap F = \emptyset$ temos que $A \cap C = \emptyset$. Desta forma, A e C são elementares disjuntos, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\left(A \cup C\right) &= \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(C) \\ &> \mathrm{m}(E) - \varepsilon + \mathrm{m}(F) - \varepsilon \\ &= \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas $A \cup C$ é elementar e $A \cup C \subset E \cup F$. Então $\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(A \cup C)$ e portanto

$$\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.

Por outro lado, sabemos que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \inf \{\mathrm{m}(B) : B \supset E, B \text{ elementar}\}.$$

Então existe $B \supset E$ conjunto elementar tal que

$$\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(E) + \varepsilon.$$

Similarmente, existe $D \supset F$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(D) < \mathrm{m}(F) + \varepsilon.$$

Portanto, temos que

$$\mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(D) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) + 2\varepsilon. \tag{3}$$

Como B e D são elementares

$$\mathrm{m}(B \cup D) \leqslant \mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(D). \tag{4}$$

Mas $B \cup D \supset E \cup F$, com $B \cup D$ é elementar. Então,

$$\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(B \cup D). \tag{5}$$

Segue de (3), (4) e (5) que

$$\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) + 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.

Portanto,

$$\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F).$$

□

Exemplo 2. O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é Jordan mensurável e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

De fato, basta mostrarmos que $\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$.

Observe que o conjunto de Cantor é construído indutivamente da seguinte forma:

No primeiro passo retiramos o intervalo $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de $[0,1]$, e denotamos por $\mathcal{C}_1$ o conjunto de pontos restantes, ou seja, $\mathcal{C}_1 \coloneqq [0,1] \setminus I_1$. Observe que $\mathcal{C}_1$ é um conjunto elementar e

$$\mathrm{m}(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

No segundo passo, vamos repetir esse processo nos dois intervalos de $\mathcal{C}_1$, ou seja, retiramos os intervalos $I_2^1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $I_2^2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ de $\mathcal{C}_1$. Considere $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$ e veja que $\mathrm{m}(I_2) = 2 \cdot \frac{1}{3^2}$. Defina $\mathcal{C}_2 \coloneqq [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2)$, e note que $\mathcal{C}_2$ é um conjunto elementar e

$$\mathrm{m}(\mathcal{C}_2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}\right).$$

Analogamente, no n-ésimo passo, retiramos o conjunto I_n de $\mathcal{C}_{n-1}$, em que

$$\mathrm{m}(I_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Definimos $\mathcal{C}_n \coloneqq [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n)$, é fácil ver que é um conjunto elementar e então

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(\mathcal{C}_n) &= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{3^i} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n .
\end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\mathrm{m}(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mas, por definição o conjunto de Cantor é $\mathcal{C} \coloneqq \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{C}_n$. Em particular, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$ para todo $n \geqslant 1$ e todos os conjuntos $\mathcal{C}_n$ são elementares, logo

$$\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) \leqslant \mathrm{m}(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$.

□

Exercício 1. Seja E um conjunto limitado em $\mathbb{R}^d$. Denote por

- $\overline{E}$ - o *fecho* de E;
- $\mathring{E}$ - o *interior* de E;
- ∂E - a *fronteira* de $E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$.

Prove que

(a) $\mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(\overline{E})$.

(b) $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(\mathring{E})$.

(c) E é Jordan mensurável se, e somente se, $\mathrm{m}^{*,J}(\partial E) = 0$.

Exemplo 3. O conjunto $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ não é Jordan mensurável.

De fato, observe que $\overline{E} = [0,1]$, logo

$$\mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(\overline{E}) = \mathrm{m}^{*,J}[0,1] = 1. \tag{6}$$

Mas, por outro lado temos que $\mathring{E} = \emptyset$ então

$$\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(\mathring{E}) = 0. \tag{7}$$

Logo, por (6) e (7) concluímos que E não é Jordan mensurável.

□

1.4: A INTEGRAL DE RIEMANN-DARBOUX

A *integral de Riemann*: Sejam $a < b$, $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e

$$\overline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

uma escolha de pontos de amostragem tais que

$$x_j^* \in I_j, \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

A norma (a malha) da partição $\mathcal{P}$

$$\Delta(\mathcal{P}) \coloneqq \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}.$$

Mais ainda, seja

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} f\left(x_j^*\right) \cdot |I_j|$$

a *soma de Riemann* correspondente.

Definição 1. Uma função f é dita *Riemann integrável* se

$$\lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) \text{ existe.} \tag{8}$$

Neste caso, o valor do limite, $\mathcal{I}(f)$, é chamado de *integral de Riemann* de f.

Comentário 1. Por (8) estamos querendo dizer que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ e todos pontos de amostragem x_j^*,

$$\Delta(\mathcal{P}) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) - \mathcal{I}(f)| < \varepsilon.$$

Lema 1. *Se f é Riemann integrável então f é limitada.*

Demonstração. Exercício. □

Observação 1. Sejam $f \geqslant 0$, $\mathcal{P}$ uma partição, $\overline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ pontos de amostragem e

$$c_j \coloneqq f\left(x_j^*\right).$$

Então,

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} c_j |I_j|.$$