

AULA 5: A EQUIVALÊNCIA ENTRE A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE DARBOUX

Teorema 1. *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável à Riemann se e somente se f é integrável à Darboux. Neste caso, $\mathcal{J}(f) = \int_a^b f(x) dx$.*

Demonstração. $\boxed{\mathcal{R} \implies \mathcal{D}}$: Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável à Riemann, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ e para toda escolha de pontos intermediários $x_1^* \in I_1, x_2^* \in I_2, \dots, x_n^* \in I_n$, se $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, então a soma de Riemann correspondente satisfaz

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) |I_k| - \mathcal{J}(f) \right| < \epsilon,$$

ou seja

$$(1) \quad \mathcal{J}(f) - \epsilon < \sum_{k=1}^n f(x_k^*) |I_k| < \mathcal{J}(f) + \epsilon.$$

Denotando por

$$m_k := \inf \{f(x) : x \in I_k\}$$

$$M_k := \sup \{f(x) : x \in I_k\}$$

e definindo as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^n M_k \mathbf{1}_{I_k},$$

tem-se

$$s \leq f \leq \sigma$$

e

$$(2) \quad \int_a^b s = \sum_{k=1}^n m_k |I_k|, \quad \int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^n M_k |I_k|.$$

Tomando em (1) o ínfimo (e depois o supremo) em cada intervalo I_k sobre todos os pontos intermediários $x_k^* \in I_k$, obtemos o seguinte:

$$\mathcal{J}(f) - \epsilon \leq \sum_{k=1}^n m_k |I_k| \leq \sum_{k=1}^n M_k |I_k| \leq \int_a^b \sigma \leq \mathcal{J}(f) + \epsilon,$$

então, usando (2),

$$\mathcal{J}(f) - \epsilon \leq \int_a^b s \leq \int_a^b \sigma \leq \mathcal{J}(f) + \epsilon.$$

Portanto,

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \leq (\mathcal{J}(f) + \epsilon) - (\mathcal{J}(f) - \epsilon) = 2\epsilon,$$

mostrando que f é integrável à Darboux.

$\boxed{\mathcal{D} \implies \mathcal{R} :}$ Sem perda de generalidade, podemos supor que $f \geq 0$. De fato, como f é limitada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $-K \leq f \leq K$. Então, $f + K \geq 0$, e uma vez estabelecida a integrabilidade à Riemann de $f + K$, a de f segue imediatamente.

Assim, suporemos a partir de agora que $0 \leq f(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Fixe $\epsilon > 0$. Como f é integrável à Darboux, existem duas funções escada s e σ tais que

$$s \leq f \leq \sigma \quad \text{e} \quad \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como $f \geq 0$, sua aproximação por baixo s também pode ser escolhida tal que $s \geq 0$. Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k}, \quad c_k \geq 0$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^N d_k \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\delta := \min \left\{ |I_k|, k = 1, \dots, N, \frac{\epsilon}{N^2 K} \right\}.$$

Considere uma partição qualquer $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ com $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pontos intermediários $x_l^* \in J_l$, para todo índice $l = 1, \dots, m$ e soma de Riemann correspondente

$$\sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l|.$$

Dado um índice $l \in \{1, \dots, m\}$, há duas possibilidades sobre o intervalo correspondente J_l :

- Existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \subset I_k$. Neste caso, chamamos o índice l “bom”.
- Não existe tal intervalo I_k . Neste caso, chamamos o índice l “ruim”.

Vamos considerar primeiro o caso ruim. Como $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \cap I_k \neq \emptyset$. Mas como $J_l \not\subset I_k$, necessariamente J_l contém um ponto extremo do intervalo I_k (e também intersecta um outro intervalo $I_{k'}$). Já que

$$|J_l| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta < |I_k|,$$

segue que J_l contém exatamente um ponto extremo de um único intervalo I_k , com $k \in \{1, \dots, N\}$. Portanto,

$$(3) \quad \#\{l \in \{1, \dots, m\} : J_l \text{ é ruim}\} \leq N$$

$$(4) \quad \sum_{l: \text{ruim}} |J_l| \leq N \delta.$$

Então, a parte da soma de Riemann correspondente aos índices ruins tem a cota

$$(5) \quad 0 \leq \sum_{l: \text{ruim}} f(x_l^*) |J_l| \leq N K \delta < \epsilon,$$

ou seja, tem uma contribuição pequena.

A seguir, vamos estimar a parte da soma de Riemann correspondente aos índices bons. Para fazer isso, note que se $x_l^* \in J_l \subset I_k$, então, como $s \leq f \leq \sigma$, segue que

$$c_k = s(x_l^*) \leq f(x_l^*) \leq \sigma(x_l^*) = d_k.$$

Começamos com a estimativa por cima:

$$\begin{aligned} \sum_{l: \text{bom}} f(x_l^*) |J_l| &= \sum_{k=1}^m \sum_{l: J_l \subset I_k} f(x_l^*) |J_l| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l: J_l \subset I_k} d_k |J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N d_k \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \leq \sum_{k=1}^N d_k |I_k| = \int_a^b \sigma. \end{aligned}$$

Portanto, usando (5), concluímos que

$$(6) \quad \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| = \sum_{l: \text{bom}} f(x_l^*) |J_l| + \sum_{l: \text{ruim}} f(x_l^*) |J_l| \leq \int_a^b \sigma + \epsilon.$$

A estimativa por baixo é similar, porém, mais sutil.

Note que dado qualquer $k \in \{1, \dots, N\}$, como $\{J_l : l = 1, \dots, m\}$ é uma partição de $[a, b]$, tem-se $I_k \subset [a, b] = \bigcup_{l=1}^m J_l$, então

$$\begin{aligned} I_k &= \bigcup_{l=1}^m (I_k \cap J_l) = \bigcup_{l: J_l \subset I_k} (I_k \cap J_l) \cup \bigcup_{l: J_l \cap I_k \neq \emptyset, J_l \not\subset I_k} (I_k \cap J_l) \\ &\subset \bigcup_{l: J_l \subset I_k} J_l \cup \bigcup_{l: \text{ruim}} J_l. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|I_k| \leq \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| + \sum_{l: \text{ruim}} |J_l| \leq \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| + N\delta,$$

onde a última desigualdade segue de (4).

Concluímos que

$$(7) \quad \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \geq |I_k| - N\delta.$$

Note também que $c_k \leq K$, já que todo c_k é um valor da função s , e $s \leq f \leq K$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| &\geq \sum_{l: \text{bom}} f(x_l^*) |J_l| \quad (\text{já que } f \geq 0) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l: J_l \subset I_k} f(x_l^*) |J_l| \geq \sum_{k=1}^N \sum_{l: J_l \subset I_k} c_k |J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \geq \sum_{k=1}^N c_k (|I_k| - N\delta) \quad (\text{usando (7)}) \\ &= \sum_{k=1}^N c_k |I_k| - \sum_{k=1}^N c_k N\delta = \int_a^b s - N\delta \sum_{k=1}^N c_k \\ &\geq \int_a^b s - N^2\delta K > \int_a^b s - \epsilon. \end{aligned}$$

Concluímos, junto com a estimativa por cima (6) que

$$\int_a^b s - \epsilon < \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| < \int_a^b \sigma + \epsilon.$$

Por outro lado, como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma.$$

Portanto,

$$\left| \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| - \int_a^b f \right| < \left(\int_a^b \sigma + \epsilon \right) - \left(\int_a^b s - \epsilon \right) = \left(\int_a^b \sigma - \int_a^b s \right) + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Isso mostra que f é integrável à Riemann e $\mathcal{J}(f) = \int_a^b f$. \square

A partir de agora, nos referiremos aos dois conceitos (equivalentes) de integração acima como a integral de Riemann-Darboux.

A proposição seguinte estabelece de maneira precisa, a bem conhecida interpretação geométrica da integral à Riemann como área de uma região.

Proposição 1. *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, e suponha que $f \geq 0$. Considere a região planar abaixo do gráfico de f e acima do eixo x :*

$$E := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Se f é integrável à Riemann-Darboux, então E é mensurável à Jordan (em \mathbb{R}^2) e

$$m(E) = \int_a^b f.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $0 \leq s \leq f \leq \sigma$ funções escada tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $d_k \geq c_k \geq 0$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Para cada índice k , considere as caixas em \mathbb{R}^2

$$Q_k := I_k \times [0, c_k], \quad \text{e} \quad R_k := I_k \times [0, d_k],$$

e os conjuntos elementares em \mathbb{R}^2

$$A := \bigcup_{k=1}^N Q_k, \quad \text{e} \quad B := \bigcup_{k=1}^N R_k.$$

Como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$A \subset E \subset B.$$

Note que

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^N c_k |I_k| = \sum_{k=1}^N |Q_k| = m(A)$$

e similarmente,

$$\int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^N d_k |I_k| = \sum_{k=1}^N |R_k| = m(B).$$

Segue que

$$(8) \quad \int_a^b s = m(A) \leq m_{*,J}(E) \leq m^{*,J}(E) \leq m(B) = \int_a^b \sigma,$$

portanto,

$$m^{*,J}(E) - m_{*,J}(E) \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon,$$

o que mostra a mensurabilidade à Jordan do conjunto E .

Além disso, como $s \leq f \leq \sigma$, temos que $\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma$, e junto com (8),

$$\left| m(E) - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon,$$

mostrando que $m(E) = \int_a^b f$. □

Exercício 1. Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções integráveis à Riemann-Darboux em $[a, b]$. Suponha que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente.}$$

Prove que o limite uniforme f também é integrável à Riemann-Darboux e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Use a versão de Darboux do conceito de integrabilidade.

No que segue, exploraremos a relação entre a continuidade e a integrabilidade de uma função.

Teorema 2. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável à Riemann-Darboux.

Demonstração. Como f é contínua e $[a, b]$ é compacto, f é, automaticamente, limitada.

Além disso, f é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a, b]$,

$$(9) \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Podemos expressar (9) de forma equivalente como segue. Dado qualquer intervalo I no domínio da função f , definimos a *oscilação* de f em I por

$$\omega_f(I) := \sup_{x, y \in I} |f(x) - f(y)| = \sup_I f - \inf_I f.$$

Então (9) é equivalente ao seguinte: dado $I \subset [a, b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) < \epsilon.$$

Considere uma partição $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$ tal que $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, e sejam

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Defina as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^N m_k I_k \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^N M_k I_k.$$

Então, $s \leq f \leq \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k) |I_k| = \sum_{k=1}^N \omega_f(I_k) |I_k|.$$

Dado qualquer índice $k \in \{1, \dots, N\}$, como $|I_k| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pela continuidade uniforme (9) de f , temos que $\omega_f(I_k) < \epsilon$. Portanto,

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon \sum_{k=1}^N |I_k| = \epsilon(b - a),$$

o que estabelece a integrabilidade à Darboux da função f . □

Comentário 1. E se a função f tiver um (ou um número finito de) ponto(s) de descontinuidade, ele ainda é integrável (supondo que seja limitada)?

Seja $x_0 \in [a, b]$ e suponha que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja limitada e contínua em $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Com uma pequena modificação, o argumento anterior ainda é aplicável neste cenário. É suficiente isolar o ponto de descontinuidade x_0 em um intervalo suficientemente pequeno.

De fato, sejam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f \leq M$, fixe $\epsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < \frac{\epsilon}{M-m}$. Então, f é contínua em $I_1 := [a, x_0 - \delta]$ e em $I_2 := [x_0 + \delta, b]$. Pelo teorema anterior, existem funções escada $s_j \leq f \leq \sigma_j$ em I_j , $j = 1, 2$, tais que

$$\int_{I_j} (\sigma_j - s_j) < \epsilon.$$

Vamos definir duas funções escada em $[a, b]$ como segue:

$$s := \begin{cases} s_1 & \text{em } I_1 \\ s_2 & \text{em } I_2 \\ m & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma := \begin{cases} \sigma_1 & \text{em } I_1 \\ \sigma_2 & \text{em } I_2 \\ M & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Evidentemente, $s \leq f \leq \sigma$. Além disso,

$$\int_a^b (\sigma - s) = \int_{I_1} (\sigma - s) + \int_{I_2} (\sigma - s) + (M - m)|(x_0 - \delta, x_0 + \delta)| < 3\epsilon,$$

provando assim a afirmação de que f é integrável à Riemann-Darboux.

O mesmo argumento é aplicável no caso de uma função com um número finito de pontos de descontinuidade. Um argumento similar, mas um pouco mais elaborado pode ser usado para tratar o caso de um conjunto de pontos de descontinuidade com medida de Jordan nula.

Exercício 2. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tenha medida de Jordan zero. Prove que f é integrável à Riemann-Darboux.