

## AULA 7: A MEDIDA DE LEBESGUE EXTERIOR

Lembre-se do conceito de medida de Jordan exterior. Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  é um conjunto limitado, então

$$m^{*,J}(E) = \inf \{m(B) : E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Se  $E$  é ilimitado, podemos também definir sua medida de Jordan exterior como  $+\infty$ . Como um conjunto elementar é uma união finita de caixas, concluímos que

$$(1) \quad m^{*,J}(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^N |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^N B_n, \text{ onde } B_1, \dots, B_N \text{ são caixas} \right\}.$$

Em outras palavras, a medida de Jordan exterior de  $E$  é o custo ínfimo necessário para cobrir  $E$  por um número *finito* de caixas.

**Definição 1.** Dado um conjunto qualquer  $E \subset \mathbb{R}^d$ , definimos sua *medida exterior de Lebesgue* por

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } \{B_n\}_{n \geq 1} \text{ são caixas} \right\},$$

isto é, o custo ínfimo necessário para cobrir  $E$  por uma união *enumerável* de caixas.

**Observação 1.** Note que  $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$  para todo  $E \subset \mathbb{R}^d$ .

Além disso, “pagando mais um  $\epsilon$ ”, as caixas  $B_n$  na definição anterior podem ser escolhidas todas *abertas* (ou todas fechadas, ou todas semi fechadas).

**Definição 2.** Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  é chamado *negligenciável* se  $m^*(E) = 0$ .

Note que  $E$  é negligenciável se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  existe uma família de caixas (todas abertas, ou todas fechadas, ou todas semi fechadas) tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon.$$

**Exemplo 1.**  $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$ .

De fato, considere uma cobertura enumerável de  $\mathbb{R}^n$  por caixas abertas:  $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ .

Para cada  $t > 0$ , o cubo  $[0, t]^d$  é um compacto coberto pelas caixas abertas  $\{B_n : n \geq 1\}$ . Então existe uma subcobertura finita, ou seja, existe  $N < \infty$  tal que  $[0, t]^d \subset \bigcup_{n=1}^N B_n$ .

Concluímos que para todo  $t > 0$  tem-se

$$t^d = m([0, t]^d) \leq \sum_{n=1}^N |B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|,$$

então, tomando  $t$  indo para  $\infty$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \infty.$$

Como a escolha da cobertura enumerável do espaço  $\mathbb{R}^d$  por caixas é arbitrária, segue que  $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$ .

**Exemplo 2.**  $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$ , onde  $m_2^*$  se refere à medida exterior de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$ , e a reta real é vista como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\mathbb{R} \equiv \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ .

De fato, dado  $\epsilon > 0$ , considere as caixas

$$B_n := [-n, n] \times \left[-\frac{\epsilon}{2n \cdot 2^n}, \frac{\epsilon}{2n \cdot 2^n}\right], \quad n \geq 1.$$

Então,

$$|B_n| = \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \quad \mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = 2\epsilon,$$

portanto,  $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$ .

**Exemplo 3.** Todo conjunto enumerável tem medida exterior de Lebesgue zero.

De fato, seja

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}$$

um conjunto enumerável.

Como um singleton é uma caixa (trivial), com volume zero, segue que

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}| = 0.$$

**Proposição 1.** (os “axiomas” da medida exterior de Lebesgue)

- (i) (conjunto vazio)  $m^*(\emptyset) = 0$ .
- (ii) (monotonicidade) Se  $E \subset F$  então  $m^*(E) \leq m^*(F)$ .
- (iii) (sub aditividade enumerável) Seja  $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$  uma família enumerável de conjuntos. Então,

$$(2) \quad m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

*Demonstração.* As primeiras duas afirmações são evidentes. Vamos provar a terceira.

Se um dos conjuntos  $E_n$  tiver medida exterior  $+\infty$ , a desigualdade (2) seria óbvia (o lado direito seria igual a  $+\infty$ ). Então, vamos supor que  $m^*(E_n) < \infty$  para todo  $n \geq 1$ .

Seja  $\epsilon > 0$  (criamos mais um  $\epsilon$  de espaço; também usaremos o truque  $\frac{\epsilon}{2^n}$ , já que estamos lidando com uma família enumerável de conjuntos).

Para cada  $n \geq 1$  existe uma família enumerável  $\{B_n^k\}_{k \geq 1}$  de caixas tal que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n^k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_n^k| < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n, k \geq 1} B_n^k,$$

que é uma família enumerável de caixas, e

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \sum_{n, k \geq 1} |B_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |B_n^k| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, a desigualdade (2) é satisfeita.  $\square$

O próximo resultado mostra a relação entre as medidas exterior e interior de Jordan, e a medida exterior de Lebesgue.

**Lema 1.** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado. Então,*

$$m_{*,J}(E) \leq m^*(E) \leq m^{*,J}(E).$$

*Demonstração.* A segunda desigualdade acima é óbvia:  $m^*(E)$  é o ínfimo do custo total de todas as coberturas enumeráveis (então, inclusive finitas) por caixas, enquanto  $m^{*,J}(E)$  é o ínfimo do custo total das coberturas finitas.

Vamos estabelecer a primeira desigualdade. Seja  $\epsilon > 0$ . Então existe um conjunto elementar e compacto (por quê?)  $K \subset E$  tal que

$$(3) \quad m_{*,J}(E) \leq m(K) + \epsilon.$$

Considere qualquer família  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  de caixas abertas tal que  $E \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$ .

Então  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  é uma cobertura aberta do conjunto compacto  $K$ , e por isso, existe  $N < \infty$  tal que  $K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n$ . Segue que

$$m(K) \leq \sum_{k=1}^N |B_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n|.$$

Portanto,

$$m_{*,J}(E) \leq m(K) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n| + \epsilon,$$

e tomando o ínfimo sobre todas as famílias de caixas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  que cobrem  $E$ , concluímos o seguinte:

$$m_{*,J}(E) \leq m^*(E) + \epsilon,$$

o que implica a desigualdade desejada, já que  $\epsilon$  é arbitrário.  $\square$

### CONJUNTOS MENSURÁVEIS À LEBESGUE: DEFINIÇÃO, EXEMPLOS

Existem várias definições (equivalentes) de mensurabilidade à Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ . Escolheremos a definição mais direta, via o “primeiro princípio de Littlewood”, que nos permite chegar mais rapidamente a resultados fundamentais sobre a estrutura do espaço de tais conjuntos.

**Definição 3.** Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  é dito *mensurável à Lebesgue* se  $E$  é “quase aberto”: para todo  $\epsilon > 0$ , existe um conjunto aberto  $U$  tal que  $U \supset E$  e  $m^*(U \setminus E) < \epsilon$ .

Vamos comparar este conceito com o conceito de mensurabilidade à Jordan.

**Exercício 1.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto Jordan mensurável.

Então, para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar e aberto  $U$  (ou seja, uma união *finita* de caixas abertas) tal que  $U \supset E$  e  $m^{*,J}(U \setminus E) < \epsilon$ .

É um fato básico de topologia do espaço  $\mathbb{R}^d$  que todo conjunto aberto  $U$  pode ser escrito como uma união *enumerável* de caixas abertas (ou seja, de bolas com respeito à distância dada pela norma do máximo). Então, todo conjunto mensurável à Jordan é, necessariamente, mensurável à Lebesgue.<sup>1</sup> O contrário *não* é verdade (como veremos em breve).

<sup>1</sup>Podemos chegar a mesma conclusão sem usar este fato de topologia. Pelo exercício anterior, dados  $E$  Jordan mensurável e  $\epsilon > 0$ , existe  $U \supset E$  elementar e aberto tal que  $m^{*,J}(U \setminus E) < \epsilon$ . Mas, pelo Lema 1,  $m^*(U \setminus E) \leq m^{*,J}(U \setminus E) < \epsilon$ , mostrando que  $E$  é quase aberto.

Além disso, de novo pelo Lema 1,

$$m_{*,J}(E) \leq m^*(E) \leq m^{*,J}(E),$$

e como  $E$  é mensurável à Jordan,  $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) = m(E)$ .

Concluimos que um conjunto mensurável à Jordan  $E$  também é mensurável à Lebesgue e

$$m(E) = m^*(E),$$

ou seja, a medida de Jordan de  $E$  é igual a sua medida exterior de Lebesgue.

Portanto, obtemos uma extensão de um conceito mais básico substituindo um processo finito por um enumerável.

Para um conjunto *mensurável* à Lebesgue, chamaremos sua medida exterior  $m^*(E)$  simplesmente de sua medida (de Lebesgue), e usaremos a notação simplificada  $m(E)$  (os comentários acima garantem a consistência desta terminologia e notação).

**Observação 2.** Todo conjunto aberto é, obviamente, mensurável à Lebesgue.

**Observação 3.** Todo conjunto negligenciável (isto é, com medida exterior de Lebesgue zero) é mensurável à Lebesgue. Em particular, todo subconjunto de uma conjunto negligenciável é mensurável. Ademais, todo conjunto enumerável é mensurável.

De fato, dados  $E \subset \mathbb{R}^d$  com  $m^*(E) = 0$  e  $\epsilon > 0$ , existe uma família enumerável de caixas abertas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon.$$

Então,  $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  é aberto,  $U \supset E$  e como  $U \setminus E \subset U$ ,

$$m^*(U \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon,$$

mostrando que  $E$  é quase aberto.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de conjuntos mensuráveis à Lebesgue que não são mensuráveis à Jordan.

**Exemplo 4.** O conjunto  $E := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  é enumerável, então, pela observação anterior é mensurável à Lebesgue. Por outro lado, como já vimos, não é mensurável à Jordan, apesar de ser limitado.

**Exemplo 5.** O exemplo anterior é, de certa forma, trivial. Na verdade, existem conjuntos topologicamente mais interessantes que são Lebesgue mas não Jordan mensuráveis. Vamos construir um tal conjunto aberto (e limitado) e a seguir um compacto.

A ideia é “engrossar” o conjunto

$$E := \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

do exemplo anterior.

De fato, para cada  $n \geq 1$ , considere o intervalo aberto

$$I_n := \left( q_n - \frac{r}{2^n}, q_n + \frac{r}{2^n} \right),$$

onde  $0 < r < \frac{1}{2}$  é uma constante. Defina

$$U := \bigcup_{n \geq 1} I_n.$$

Então,  $U$  é aberto (e em particular, Lebesgue mensurável) e claramente limitado, por exemplo  $U \subset [-1, 2]$ , mas não é Jordan mensurável. De fato, temos

$$m^{*,J}(U) = m^{*,J}(\bar{U}) \geq m^{*,J}(\bar{E}) = m^{*,J}([0, 1]) = 1,$$

enquanto, por outro lado temos

$$m_{*,J}(U) \leq m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2r < 1 \leq m^{*,J}(U),$$

então  $m^{*,J}(U) \neq m_{*,J}(U)$ .

Ademais, seja  $K := [-1, 2] \setminus U$ . Então  $K$  é um conjunto compacto, portanto Lebesgue mensurável (ainda não provamos isso, vamos aceitá-lo por enquanto). Por outro lado,  $K$  não pode ser Jordan mensurável, pois, caso contrário,  $U = [-1, 2] \setminus K$  seria Jordan mensurável também.

**Comentário 1.** Uma pergunta natural é por que não definir o conceito de mensurabilidade à Lebesgue seguindo exatamente o mesmo padrão do conceito de mensurabilidade à Jordan, considerando um conceito de medida interior.

Vamos *tentar* a seguir esse caminho, definindo, analogamente à medida interior de Jordan, a medida interior de Lebesgue de um conjunto  $E$  por

$$m_*(E) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : \{B_n\}_{n \geq 1} \text{ caixas, } \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset E \right\},$$

e a mensurabilidade de  $E$  pelo fato de que as suas medidas exterior  $m^*(E)$  e interior  $m_*(E)$  sejam iguais.

Considere o conjunto

$$F := [0, 1] \setminus \mathbb{Q}.$$

Este conjunto *deveria* ser mensurável, como diferença de dois conjuntos mensuráveis (um intervalo é um conjunto enumerável). Mas, como  $F$  não contém intervalos, sua medida interior  $m_*(F) = 0$ , enquanto, por outro lado, sua medida exterior deve ser  $m^*(F) = 1$ . Isto é porque, como  $F \subset [0, 1] \subset F \cup \mathbb{Q}$ , temos

$$1 = m^*([0, 1]) \leq m^*(F) + m^*(\mathbb{Q}) = m^*(F) \leq 1.$$

Portanto, essa abordagem não funciona com sucesso. Uma explicação mais especulativa é que o espaço euclidiano possui subconjuntos densos *enumeráveis*, então trocando processos finitos por processos enumeráveis abre amplamente as portas, permitindo a entrada de conjuntos muito mais gerais, cuja medida interior não capta bem seus tamanhos.

A partir de agora, salvo indicação ao contrário, mensurabilidade se refere a mensurabilidade por Lebesgue.