

AULA 9: A MEDIDA DE LEBESGUE

(CONVERGÊNCIA MONÓTONA, REGULARIDADE, CRITÉRIOS DE MEDIDA FINITA)

Começamos com um teorema de convergência monótona para conjuntos, útil em si, e também uma prévia de um resultado muito importante na teoria de integração.

Introduzimos algumas notações acerca do “limite” de uma seqüências $\{E_n\}_{n \geq 1}$ de conjuntos.

▪ $E_n \nearrow E$ significa $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$, ou seja, $\{E_n\}_{n \geq 1}$ é uma seqüência não decrescente de conjuntos e $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

▪ $E_n \searrow E$ significa $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$, ou seja, $\{E_n\}_{n \geq 1}$ é uma seqüência não crescente de conjuntos e $E = \bigcap_{n \geq 1} E_n$.

Teorema 1. (convergência monótona para conjuntos) *Seja $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis.*

- (1) (convergência monótona para cima) *Se $E_n \nearrow E$ então $m(E_n) \rightarrow m(E)$ quando $n \rightarrow \infty$.*
- (2) (convergência monótona para baixo) *Se $E_n \searrow E$ e se $m(E_1) < \infty$, então $m(E_n) \rightarrow m(E)$ quando $n \rightarrow \infty$. A hipótese $m(E_1) < \infty$ é necessária.*

Demonstração. Observe que se $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, logo $m(F) = m(E) + m(F \setminus E)$. Portanto, se $m(E) < \infty$, tem-se $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.

(1) Se $m(E_N) = \infty$ para algum $N \geq 1$, então, como a seqüência $\{E_n\}_{n \geq 1}$ é não decrescente, pela monotonicidade da medida, segue que $m(E_n) = \infty$ para todo $n \geq N$ e também $m(E) = \infty$, mostrando a afirmação neste caso.

Se $m(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$, como $E_n \subset E_{n+1}$ temos que

$$m(E_{n+1} \setminus E_n) = m(E_{n+1}) - m(E_n).$$

Além disso, a união $\bigcup_{n \geq 1} E_n$ pode ser escrita como uma união disjunta como segue:

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup \dots \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n) \sqcup \dots$$

Portanto, pela σ -aditividade da medida,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) + \dots + m(E_{n+1} \setminus E_n) + \dots \\ &= m(E_1) + m(E_2) - m(E_1) + \dots + m(E_{n+1}) - m(E_n) + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n). \end{aligned}$$

(2) Considere os intervalos $E_n := [n, \infty) \subset \mathbb{R}$. Então, claramente $E_n \searrow \emptyset$, $m(E_n) = \infty$, mas $m(\emptyset) = 0$, mostrando a necessidade da hipótese $m(E_N) < \infty$ para algum $N \geq 1$.

Suponha que $m(E_1) < \infty$ e considere os complementos dos conjuntos $\{E_n\}_{n \geq 1}$ relativamente a E_1 , ou seja, considere os conjuntos $F_n := E_1 \setminus E_n$, $n \geq 1$.

Como $\{E_n\}_{n \geq 1}$ é uma seqüência não crescente, $\{F_n\}_{n \geq 1}$ é não decrescente e $F_n \nearrow F$, onde

$$F = \bigcup_{n \geq 1} F_n = \bigcup_{n \geq 1} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n \geq 1} E_n = E_1 \setminus E.$$

Pelo item (1), $m(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n)$, portanto,

$$m(E_1) - m(E) = m(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m(E_1) - m(E_n)) = m(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n),$$

mostrando que $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$, dado que $m(E_1) < \infty$. □

A seguir, mostraremos a compatibilidade entre a medida de Lebesgue e a estrutura topológica do espaço \mathbb{R}^d .

Teorema 2. (*regularidade interior*) *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável. Então*

$$m(E) = \sup \{m(K) : K \subset E, K \text{ conjunto compacto}\} .$$

Observação 1. Já provamos a regularidade exterior da medida exterior de Lebesgue. Em particular, nesse contexto de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$, a regularidade exterior afirma que

$$m(E) = \inf \{m(U) : U \supset E, U \text{ conjunto aberto}\} .$$

Devido às propriedades de regularidade (interior e exterior), ou seja, à compatibilidade da medida de Lebesgue com a topologia do espaço ambiente, chamamos a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d de medida de Radon.

Demonstração do Teorema 2. A desigualdade $m(E) \geq \sup \{m(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$ vale pela monotonicidade da medida. Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Basta provar que existe $K \subset E$ compacto tal que

$$m(E) \leq m(K) + \epsilon .$$

Como E é mensurável, pelo Teorema 1, item (iii) da aula 9, E é quase fechado por dentro, ou seja, existe $F \subset E$ fechado tal que

$$m(E \setminus F) \leq \epsilon .$$

Portanto,

$$m(E) = m(F \sqcup (E \setminus F)) = m(F) + m(E \setminus F) \leq m(F) + \epsilon .$$

Todo conjunto fechado é o limite para cima de uma sequência de conjuntos compactos. De fato, para todo $n \geq 1$, denotando por

$$K_n := F \cap [-n, n]^d ,$$

temos que os conjuntos K_n são fechados e limitados, logo compactos, e $K_n \nearrow F$.

Pelo item (i) do Teorema 1, $m(K_n) \rightarrow m(F)$ quando $n \rightarrow \infty$, então existe N tal que

$$m(F) \leq m(K_N) + \epsilon .$$

Concluimos que o conjunto compacto K_N satisfaz $K_N \subset F \subset E$ e

$$m(E) \leq m(F) + \epsilon \leq m(K_N) + 2\epsilon ,$$

finalizando a prova do teorema. □

A medida de Lebesgue $m: \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ é invariante por translação, ou seja, para todo conjunto mensurável E e para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$m(E + x) = m(E) .$$

De fato, a invariância por translação vale para o volume de caixas e a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável é expressa em termos de volumes de caixas que o cobrem.

Acontece que módulo um fator de escala, a medida de Lebesgue é a única medida no espaço euclidiano, invariante por translação.

Teorema 3. (*unicidade da medida de Lebesgue*) *Seja $\mu: \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ uma função tal que*

$$(1) \mu(\emptyset) = 0 .$$

$$(2) \mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \text{ para toda sequência } \{E_n\}_{n \geq 1} \text{ de conjuntos mensuráveis e disjuntos.}$$

(3) $\mu(E + x) = \mu(E)$ para todo conjunto mensurável E e para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(4) $\mu([0, 1]^d) = 1$.

Então, $\mu \equiv m$.

Demonstração. Exercício. □

Um conjunto limitado automaticamente tem medida exterior finita. O contrário não é verdade. Por exemplo, pode ser mostrado (exercício) que o conjunto

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

é mensurável à Lebesgue, possui medida finita, mas claramente não é limitado.

O teorema seguinte caracteriza conjuntos mensuráveis com medida finita.

Teorema 4. (*critérios para medida finita*) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é Lebesgue mensurável e $m(E) < \infty$.
- (ii) E é quase aberto por fora com medida finita: $\forall \epsilon > 0$ existe $U \supset E$ aberto tal que $m(U) < \infty$ e $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.
- (iii) E está perto de um aberto limitado: $\forall \epsilon > 0$ existe um conjunto aberto e limitado U tal que $m^*(U \Delta E) < \epsilon$.
- (iv) E é quase compacto por dentro: $\forall \epsilon > 0$ existe $K \subset E$ compacto tal que $m^*(E \setminus K) < \epsilon$.
- (v) E está perto de um compacto: $\forall \epsilon > 0$ existe um compacto K tal que $m^*(K \Delta E) < \epsilon$.
- (vi) E está perto de um conjunto mensurável e limitado: $\forall \epsilon > 0$ existe um conjunto mensurável e limitado A tal que $m^*(A \Delta E) < \epsilon$.
- (vii) E está perto de um conjunto mensurável com medida finita: $\forall \epsilon > 0$ existe um conjunto mensurável A tal que $m(A) < \infty$ e $m^*(A \Delta E) < \epsilon$.
- (viii) E está perto de um conjunto elementar: $\forall \epsilon > 0$ existe um conjunto elementar B tal que $m^*(B \Delta E) < \epsilon$.
- (ix) E parece pixelado (em escala suficientemente fina): $\forall \epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ e existe D , uma união finita de caixas diádicas de geração m (ou seja, de comprimento lateral ou escala $\frac{1}{2^m}$), tal que $m^*(D \Delta E) < \epsilon$.



Demonstração. $\boxed{(i) \implies (ii)}$ Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de mensurabilidade, E é quase aberto, logo existe $U \supset E$ aberto tal que $m^*(U \setminus E) \leq \epsilon$. Segue que U deve ter medida finita:

$$m(U) = m(E \sqcup (U \setminus E)) = m(E) + m(U \setminus E) = m(E) + m^*(U \setminus E) \leq m(E) + \epsilon < \infty.$$

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Esta implicação é óbvia: E é quase aberto, logo, mensurável, e pela monotonicidade da medida, se $E \subset U$, onde U é aberto com medida finita, então $m(E) \leq m(U) < \infty$.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Já sabemos (veja Teorema 1 (ii) da aula 8) que todo conjunto E que está (arbitrariamente) perto de abertos, necessariamente é mensurável.

Resta provar que E possui medida finita. Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto e limitado tais que $m(U \triangle E) < \epsilon$. Como

$$E \subset (E \setminus U) \cup U \subset (E \triangle U) \cup U,$$

temos que

$$m(E) \leq m(E \triangle U) + m(U) \leq \epsilon + m(U) < \infty.$$

$\boxed{(ii) \implies (viii)}$ Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto tais que

$$U \supset E, \quad m(U) < \infty, \quad m^*(U \setminus E) < \epsilon.$$

Pelo Lema 3 da aula 8, o conjunto aberto U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n \geq 1}$. Pelo Lema 2 da aula 8,

$$m(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|.$$

Mas como $m(U) < \infty$, a série infinita acima é convergente, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que sua cauda satisfaz

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon.$$

Seja

$$B := \bigcup_{n=1}^N B_n.$$

Então, B é um conjunto elementar (uma união finita de caixas), $B \subset U$ e

$$U \triangle B = U \setminus B \subset \bigcup_{n \geq N+1} B_n.$$

Segue que

$$m^*(U \triangle B) \leq m^*\left(\bigcup_{n \geq N+1} B_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon.$$

Por outro lado,

$$m^*(U \triangle E) = m^*(U \setminus E) < \epsilon,$$

portanto,

$$m^*(B \triangle E) \leq m^*(B \triangle U) + m^*(U \triangle E) < 2\epsilon,$$

monstrando a afirmação.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Pagando mais um ϵ , podemos supor que o conjunto elementar (logo, limitado) B do argumento anterior é aberto. Mais precisamente, ampliando ligeiramente cada caixa fechada que compõe B , obtemos um conjunto aberto $B' \supset B$ tal que $m(B' \setminus B) < \epsilon$, logo B' está ϵ -perto de B , que já está ϵ -perto de E , provando assim a afirmação.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(iii)}}$ Esta afirmação é óbvia, já que todo conjunto elementar é limitado, e, pagando mais um ϵ se for necessário, pode ser suposto aberto.

Assim acabamos de provar as equivalências $(i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (viii)$. As equivalências $(ii) \iff (iv) \iff (v) \iff (vi) \iff (vii)$ são similares e são deixadas como exercícios.

Claramente, a priori (ix) é mais forte do que (viii): parecer pixelado significa estar (arbitrariamente) perto de uma união finita de caixas diádicas de mesma geração, que obviamente é um conjunto elementar. Então, resta provar a implicação $(viii) \implies (ix)$, que é a afirmação mais interessante do teorema.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(ix)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe um conjunto elementar $B = B_1 \cup \dots \cup B_N$ tal que $m^*(B \Delta E) < \epsilon$, onde B_1, \dots, B_N são caixas, que podem ser escolhidas fechadas.

A ideia é pixelizar cada caixa B_n , $1 \leq n \leq N$.

Então, seja B_0 uma caixa fechada qualquer. Vamos provar que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que B_0 parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^{m_0}}$. Para cada $m \geq 0$, considere a união de todas caixas diádicas $Q_{i,m}$ de geração m que intersectam B_0 :

$$D_m := \bigcup \{Q_{i,m} : Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Como, para cada geração m , temos $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Q_{i,m} = \mathbb{R}^d$, segue que $B_0 \subset D_m$, portanto,

$$B_0 \subset \bigcap_{m \geq 0} D_m.$$

Além disso, pela propriedade de encaixamento das caixas diádicas (toda caixa de geração $m+1$ está contida em uma caixa de geração m), temos que $D_{m+1} \subset D_m$, ou seja, a sequência $\{D_m\}_{m \geq 0}$ é não decrescente.

Vamos mostrar que módulo um conjunto negligenciável, $\bigcap_{m \geq 0} D_m$ é, na verdade, igual a B_0 .

Seja

$$x \in \left(\bigcap_{m \geq 0} D_m \right) \setminus B_0.$$

Como B_0 é fechado e $x \notin B_0$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $V \cap B_0 = \emptyset$. Para m suficientemente pequeno, existe uma caixa diádica $Q_{j,m}$ de geração m tal que $x \in Q_{j,m} \subset V$. Portanto,

$$x \in Q_{j,m} \quad \text{e} \quad Q_{j,m} \cap B_0 = \emptyset.$$

Por outro lado, $x \in D_m = \bigcup \{Q_{i,m} : Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset, i \in \mathbb{Z}\}$, portanto existe uma caixa diádica $Q_{i,m}$ de geração m tal que

$$x \in Q_{i,m} \quad \text{e} \quad Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset.$$

Segue que $x \in Q_{j,m} \cap Q_{i,m}$ e $i \neq j$ (essas duas caixas são diferentes). Mas duas caixas diádicas de mesma geração são iguais ou quase disjuntas. Portanto, x pertence à *fronteira* de uma caixa diádica, que é um conjunto *negligenciável* (porque a fronteira de uma caixa consiste em seus lados, que são caixas de dimensão menor do que a do espaço ambiente). A família de caixas diádicas é enumerável. Portanto, $\left(\bigcap_{m \geq 0} D_m \right) \setminus B_0$ está contido em um conjunto negligenciável (uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis), logo, é negligenciável também.

Concluimos que, para algum conjunto \mathcal{Z} de medida zero, temos

$$\bigcap_{m \geq 0} D_m = B_0 \cup \mathcal{Z},$$

portanto,

$$D_m \searrow B_0 \cup \mathcal{Z}.$$

Pelo item (i) do Teorema 1, segue que

$$m(B_0) = m(B_0 \cup \mathcal{Z}) = \lim_{m \rightarrow \infty} m(D_m),$$

portanto existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_0$,

$$m(D_m) < m(B_0) + \frac{\epsilon}{N},$$

logo,

$$m(D_m \setminus B_0) = m(D_m) - m(B_0) < \frac{\epsilon}{N}.$$

Vamos aplicar a conclusão acima a cada caixa B_n , $1 \leq n \leq N$. Existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que B_n parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^{m_n}}$ para todo $m \geq m_n$; mais precisamente, existe D_m^n , uma união finita de caixas diádicas de geração m , tal que

$$m(D_m^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}.$$

Seja $\underline{m} := \max\{m_n : 1 \leq n \leq N\}$. Então, na escala $\frac{1}{2^{\underline{m}}}$ todas as caixas B_n , $1 \leq n \leq N$ parecem pixelizadas, no sentido que

$$m(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}.$$

Seja

$$D := \bigcup_{n=1}^N D_{\underline{m}}^n.$$

Então, D é uma união finita de caixas diádicas de mesma geração \underline{m} e $D \supset B = \bigcup_{n=1}^N B_n$. Além disso,

$$D \setminus B = \left(\bigcup_{n=1}^N D_{\underline{m}}^n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \right) \subset \bigcup_{n=1}^N (D_{\underline{m}}^n \setminus B_n),$$

portanto,

$$m(D \triangle B) = m(D \setminus B) \leq \sum_{n=1}^N m(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n) < N \frac{\epsilon}{N} = \epsilon.$$

Provamos que B parece pixelado, ou seja, está ϵ -perto de D , que está ϵ -perto de E , finalizando a prova do teorema. \square