AULA 12: FUNÇÕES MENSURÁVEIS À LEBESGUE (SEM SINAL)

Poderíamos pensar em uma função mensurável de duas maneiras: como uma função bem aproximável por funções simples ou, por analogia com o conceito de função contínua em topologia, como uma função para a qual a pré-imagem de qualquer conjunto relevante é mensurável.

Definimos o conceito de função mensurável à Lebesgue pela primeira maneira e depois provamos a equivalência entre essas abordagens.

Definição 1. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ é mensurável à Lebesgue se f for o limite pontual de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, se existir uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que

$$s_n(x) \to f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Vamos introduzir algumas notações úteis.

Notação. Dada uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ e um subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$, denotamos por

$$\{f \in A\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

a preimagem de A pela função f.

Da mesma maneira, dado $\lambda \in [-\infty, \infty]$, seja

$$\{f > \lambda\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) > \lambda\} = f^{-1}\left((\lambda, \infty]\right)\,.$$

Similarmente podemos definir $\{f \geq \lambda\}$, $\{f \leq \lambda\}$ e $\{f < \lambda\}$.

Essas notações têm um sabor probabilístico, onde $\{f \in A\}$ pode ser pensado como o evento que f pertença ao conjunto A.

A seguir caracterizamos a mensurabilidade de uma função sem sinal.

Teorema 1. *Para uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(2) f é o limite em quase todo ponto de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para quase *todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

(3) f é o limite de uma sequência não decrescente *de funções simples, sem sinais, limitadas, com suportes limitados, ou seja, existe uma sequência*

$$0 \leq s_1(x) \leq \ldots \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \ldots \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

tal que, para todo $n \geq 1$, a função s_n é simples, limitada, $\operatorname{supp}(s_n)$ é limitado e

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

(4) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(5) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \geq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(6) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f < \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(7) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \leq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(8) Para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.

(9) Para todo aberto $U \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.

(10) Para todo fechado $F \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.

Alguns fatos técnicos. Antes de começar a prova do teorema acima, vamos sujar as mãos, aprendendo alguns segredos de ganha-pão deste negócio.[1]

- É evidente que para dois números reais x e y, temos

$$y \geq x \iff \forall \epsilon > 0,\ y > x - \epsilon \iff \forall m \geq 1,\ y > x - \frac{1}{m}\,.$$

Portanto, dados uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ e um número $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\}, \tag{1a}$$

ou seja, o evento $\{f \geq \lambda\}$, dado por uma desigualdade não estrita pode ser descrito por um processo enumerável envolvendo desigualdades estritas.

Similarmente, o oposto também vale. Como, evidentemente,

$$y > x \iff \exists \epsilon > 0,\ y \geq x + \epsilon \iff \exists m \geq 1,\ y \geq x + \frac{1}{m}\,,$$

segue que

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ f \geq \lambda + \frac{1}{m} \right\}. \tag{1b}$$

Os eventos complementares $\{f < \lambda\}$ e $\{f \leq \lambda\}$ podem ser caracterizados do mesmo modo (ou, diretamente via as leis de De Morgan).

- Considere $\left\{f_n \colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]\right\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções, e sejam $\inf_{n \geq 1} f_n$ e $\sup_{n \geq 1} f_n$ as funções ínfimo e supremo pontuais, respectivamente. Como para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\inf_{n \geq 1} f_n(x) \geq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \geq \lambda$$

e

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) \leq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \leq \lambda$$

tem-se

$$\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e} \tag{2a}$$

$$\left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq \lambda\}\,. \tag{2b}$$

Portanto, usando (1a) e as leis de De Morgan, temos

$$\begin{aligned}\left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} &= \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\}^{\complement} \\ &= \bigcap_{m \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq 1} \left\{ f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\} \right)^{\complement} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\},\end{aligned}$$

e outras relações similares.

Suponha que a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge pontualmente. Então, como

$$\lim_{n \geq \infty} f_n = \limsup_{n \geq 1} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k,$$

[1] Pintar um quadro, além de escolher um bom assunto, de ter imaginação e talento, requer também reunir suas ferramentas, saber como diluir e combinar tinta, como preparar a tela e etc. Por enquanto, vamos preparar as tintas.

temos

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \geq \lambda\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \left\{\sup_{k\geq n} f_k \geq \lambda\right\}$$
$$= \bigcap_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \left\{f_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\}. \tag{3}$$

Demonstração do Teorema 1. Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ e seja $\lambda \geq 0$,

A equivalência entre itens (4) e (5) segue das identidades (1a),(1b):

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m\geq 1} \left\{f \geq \lambda + \frac{1}{m}\right\} \quad \text{e} \quad \{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m\geq 1} \left\{f > \lambda - \frac{1}{m}\right\},$$

já que toda união e interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Ademais, um conjunto E é mensurável se e somente se seu complemento $E^{\complement}$ é mensurável. Como

$$\{f < \lambda\} = \{f \geq \lambda\}^{\complement} \quad \text{e} \quad \{f \leq \lambda\} = \{f > \lambda\}^{\complement},$$

temos que (6) $\iff$ (5) e (7) $\iff$ (4).

Seja $I \subset [0,\infty)$ um intervalo qualquer, por exemplo, $I = [a,b)$. Então,

$$\{f \in I\} = \{f \in [a,b)\} = \{f \geq a\} \cap \{f < b\},$$

portanto, (5) e (6) (que já são equivalentes), implicam (8). Obviamente, (8) implica (4).

Todo conjunto aberto $U \subset [0,\infty)$ é uma união enumerável de intervalos. Portanto, (8) implica (9), que claramente implica (4).

Um conjunto $F \subset [0,\infty)$ é fechado se e somente se seu complemento $F^{\complement}$ é aberto. Além disso,

$$\{f \in F\}^{\complement} = \{f \in F^{\complement}\},$$

portanto, (9) e (10) são equivalentes.

Provamos, assim, que as afirmações de (4) até (10), a respeito da pré-imagem pela função f de vários tipos de conjuntos "relevantes"são, todas, equivalentes.

Evidentemente, (3) $\implies$ (1) $\implies$ (2). Portanto, para fechar o ciclo de equivalências, basta provar que (2) $\implies$ (5) e que (8) $\implies$ (3).

$\boxed{(2) \implies (5)}$ Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ e suponha que exista uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ converge em *todo* ponto $x \in \mathbb{R}^d$ (mas não necessariamente para $f(x)$). De fato, em todo ponto onde essa sequência não converge (isto é, para um conjunto *negligenciável* de pontos) podemos trocar o valor de cada função $s_n(x)$ por 0; assim, a nova sequência converge em todo ponto, e ainda converge para f em quase todo ponto. Portanto, dado $\lambda > 0$,

$$\{f \geq \lambda\} = \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n \neq f\} \cup \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n = f\}$$
$$= \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n \neq f\} \cup \left\{\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lambda\right\}.$$

O primeiro conjunto na união acima é mensurável pois é negligenciável. Pela fórmula 3, o segundo conjunto pode ser descrito como

$$\left\{\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \left\{s_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\},$$

ou seja, como o resultado de uma aplicação enumerável de uniões ou interseções de conjuntos do tipo $\{s_k > t\}$ para alguns $k \geq 1$ e $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para concluir que $\{f \geq \lambda\}$ seja mensurável, basta provar o mesmo tipo de propriedade para funções simples. Sejam s uma função simples sem sinal e $t \in [0, \infty)$. Provaremos que o conjunto $\{s > t\}$ é mensurável.

Escrevemos $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos, enquanto os coeficientes $c_i > 0$ podem ser considerados distintos (agrupando termos com coeficientes iguais).

Sem perda de generalidade, supomos que

$$c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \dots c_k \leq \infty \,.$$

Então, existe um índice i, com $0 \leq i < k$, tal que $t \in [c_i, c_{i+1})$, e daí,

$$\{x \colon s(x) > \lambda\} = \{x \colon s(x) > c_i\} = \{x \colon s(x) \in \{c_{i+1}, \dots, c_k\}\} = E_{i+1} \cup \dots \cup E_k \,,$$

que é um conjunto mensurável, assim finalizando a prova dessa implicação.

$\boxed{(8) \implies (3)}$ Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ e suponha que $\{f \in I\}$ seja mensurável para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$. Vamos construir uma sequência não decrescente de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n \geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em todo ponto, e cada s_n é limitada e possui suporte limitado.

Gíria: Dizemos que uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ "mora numa caixa"se for limitada e possuir suporte limitado, ou seja, se existirem $A, B < \infty$ tais que $\lvert f(x) \rvert \leq A$ para todo $\lvert x \rvert \leq B$ e $f(x) = 0$ para todo $\lvert x \rvert > B$.

Fixe $n \geq 1$ e considere a caixa $B_n := [-n, n]^d \times [0, n] \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty]$. Para "localizar" f dentro da caixa B_n, fazemos um truncamento vertical e um truncamento horizontal de f. Mais precisamente, definimos $s_n(x)$ como 0 se $\lvert x \rvert > n$ e como n se $f(x) \geq n$. Resta definir $s_n(x)$ para pontos x com $f(x) < n$.

A ideia nova e profunda para construir uma função simples s_n aproximando f razoavelmente é considerar uma *partição do contradomínio* $[0, \infty]$ da função f.[2]

Então, particionamos o intervalo $[0, n)$ (o resto do contradomínio já foi abordado) em intervalos diádicos de comprimento $\frac{1}{2^n}$ e definimos $s_n(x)$ como o ponto extremo menor de cada tal intervalo, quando $f(x)$ pertence a esse intervalo. Mais formalmente, seja

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{se } \lvert x \rvert > n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \\ \frac{j}{2^n} & \text{se } f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right), \ j = 0, \dots, n\,2^n - 1 \,. \end{cases} \\ &= \left(n\, \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n - 1} \frac{j}{2^n} \mathbf{1}_{\left\{f \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right\}} \right) \mathbf{1}_{\{x \colon \lvert x \rvert \leq n\}} \,. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\{f \in I\}$ é mensurável para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$, a função s_n definida acima é simples. Evidentemente, por construção, $0 \leq s_n \leq f$ e s_n mora na caixa B_n. Usando a propriedade de encaixamento dos intervalos diádicos, não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ em todo ponto, e para todo n.

Resta provar que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Fixe tal ponto x.

Se $f(x) = \infty$, então, para todo $n \geq 1$, $s_n(x) = n \to \infty = f(x)$.

[2] Ao contrário da integral de Darboux, onde consideramos partições do *domínio* da função e, em seguida, as funções escada correspondentes.

Se $f(x) < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$ e $|x| \leq N$. Então, para todo $n \geq N$, temos que $s_n(x) = \frac{j}{2^n}$ e $f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, para algum $j \in \{0, \dots, n\, 2^n - 1\}$. Portanto,

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0\,,$$

mostrando que $s_n(x) \to f(x)$. □

Em seguida, mostramos que o conjunto de funções mensuráveis à Lebesgue (sem sinais) é fechado sob várias operações.

Proposição 1. *Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $\inf_{n\geq 1} f_n$ e $\sup_{n\geq 1} f_n$ são mensuráveis.*

Ademais, se $f_n \to f$ em quase todo ponto, então f é mensurável também.

Demonstração. Seja $\lambda \geq 0$. Como, para todo $n \geq 1$, f_n é mensurável, pelo teorema anterior, os conjuntos $\{f_n \geq \lambda\}$ e $\{f_n \leq \lambda\}$ são mensuráveis. Usando (2a) e (2b), temos que

$$\left\{\inf_{n\geq 1} f_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e} \quad \left\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \leq \lambda\}\ ,$$

o que prova a mensurabilidade das funções ínfimo e supremo.

A segunda afirmação, sobre a mensurabilidade do limite de uma sequência de funções mensuráveis segue da mesma forma usando (3):

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \left\{f_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\}.$$

□

Proposição 2. *Sejam f e g duas funções mensuráveis sem sinais. Então, $f+g$ e $f\,g$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Como f g são mensuráveis, por definição, elas são limites pontuas de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e, respectivamente $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$. Como $s_n + \sigma_n$ e $s_n\,\sigma_n$ são funções simples e

$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad s_n\,\sigma_n \to f\,g\,,$$

concluímos que $f + g$ e $f\,g$ são mensuráveis. □