AULA 14: AS PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS SEM SINAIS

Apresentaremos uma coleção das propriedades mais comuns da integral de Lebesgue de funções mensuráveis sem sinais.

Teorema 1. *(propriedades básicas da integral de Lebesgue sem sinal) Sejam* $f, g \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ *funções mensuráveis.*

(1) (monotonicidade) Se $f \le g$ *em q.t.p. então* $\displaystyle\int f \le \int g$.

(2) (equivalência) Se $f = g$ *em q.t.p. então* $\displaystyle\int f = \int g$.

(3) (linearidade) $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$ *e, para todo* $c \in [0, \infty]$, $\displaystyle\int c\, f = c \int f$.

(4) (divisibilidade) Seja E *um conjunto mensurável. Então,* $f\, \mathbf{1}_E$ *e* $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ *são mensuráveis e*

$$\int f = \int f\, \mathbf{1}_E + \int f\, \mathbf{1}_{E^\complement} .$$

Notação. Denotando, para um conjunto mensurável E,

$$\int_E f := \int_{R^d} f\, \mathbf{1}_E ,$$

a divisibilidade da integral de Lebesgue torna-se

$$\int_{R^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f .$$

Além disso, uma função $f \colon E \to [0, \infty]$ é dita mensurável se $\tilde{f}$, a sua extensão por zero em $E^\complement$, for mensurável. Neste caso, definimos $\int_E f := \int_{R^d} \tilde{f}$.

Demonstração do Teorema 1. A monotonicidade da integral já foi estabelecida (segue imediatamente da definição). A equivalência é uma consequência da monotonicidade, já que $f = g$ em q.t.p. se e somente se $f \le g$ em q.t.p. e $g \le g$ em q.t.p.

Quanto a linearidade, pelo Teorema 1 (3) da aula 12, existem sequências *não decrescentes* de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n\ge1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então, claramente, $s_n + \sigma_n \nearrow f + g$ em todo ponto. Aplicando o teorema de convergência monótona para cada uma das sequências $\{s_n\}_{n\ge1}$, $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ e $\{s_n + \sigma_n\}_{n\ge1}$, temos que

$$\int s_n \to \int f, \quad \int \sigma_n \to \int g, \quad \int (s_n + \sigma_n) \to \int (f+g) . \tag{1}$$

Mas a integral de Lebesgue já foi demonstrado ser linear para funções simples, logo

$$\int (s_n + \sigma_n) = \int s_n + \int \sigma_n .$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (1), concluímos que

$$\int (f+g) = \int f + \int g .$$

Ademais, se $c \in [0, \infty]$ e $s_n \nearrow f$, então $c\, s_n \nearrow cf$. Pelo teorema de convergência monótona e a linearidade da integral de funções simples, temos

$$\int c\, f = \lim_{n \to \infty} \int c\, s_n = c \lim_{n \to \infty} \int s_n = c \int f\,.$$

Finalmente, produto de funções mensuráveis é mensurável, logo $f\, \mathbf{1}_E$ e $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso,

$$f = f\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} = f\, \mathbf{1}_E + f\, \mathbf{1}_{E^\complement},$$

portanto, a divisibilidade é uma consequência da linearidade. □

O próximo resultado fornece uma estimativa por cima para a medida do conjunto $\{f \geq \lambda\}$, onde f é uma função mensurável sem sinal e $\lambda > 0$.

Teorema 2. *(a desigualdade de Markov) Sejam $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável e $\lambda > 0$. Então,*

$$\mathrm{m}\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int f}{\lambda}\,.$$

Demonstração. Seja $E := \{f \geq \lambda\}$. Como f é mensurável, o conjunto E é mensurável. Usando a divisibilidade da integral de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned}
\int f &= \int_E f + \int_{E^\complement} f \geq \int_E f \qquad &&\left(\text{já que } \int_{E^\complement} f = \int f\, \mathbf{1}_{E^\complement} \geq 0\right) \\
&= \int f\, \mathbf{1}_E \geq \int \lambda\, \mathbf{1}_E \qquad &&(\text{já que } f \geq \lambda\, \mathbf{1}_E, \text{ pois } f(x) \geq \lambda \text{ quando } x \in E) \\
&= \lambda\, \mathrm{m}(E)\,.
\end{aligned}$$

□

Mesmo que a estimativa acima pareça grosseira, ela representa uma das mais importantes ferramentas usadas na teoria das probabilidades, na teoria da medida, na análise e etc. Nas mãos do matemático certo (por exemplo, Sergei Bernstein), ela pode ser bastante refinada de apenas uma faca velha para um bisturi afiado.

Apresentamos dois corolários simples da desigualdade de Markov.

Corolário 1. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, $\displaystyle\int f = 0$ se e somente se $f = 0$ em q.t.p.

Demonstração. Claramente, $f = 0$ em q.t.p. se e somente se $\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = 0$. Mas

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \colon f(x) \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Portando, supondo que $\displaystyle\int f = 0$, pela desigualdade de Markov, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int f}{\lambda} = 0\,,$$

logo,

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = 0\,.$$

□

Corolário 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Se $\displaystyle\int f < \infty$, então $f < \infty$ em q.t.p. A recíproca não é verdadeira.

Demonstração. Claramente, $f(x) = \infty$ se e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f(x) \geq n$. Além disso, $\{f \geq n\} \supset \{f \geq n+1\}$. Portanto,

$$\{f \geq n\} \searrow \{f = \infty\}\,.$$

Como, pela desigualdade de Markov,

$$\mathrm{m}\{f \geq 1\} \leq \int f < \infty\,,$$

o teorema de convergência monótona de baixo para conjuntos é aplicável e implica o seguinte:

$$\mathrm{m}\{f = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\{f \geq n\}\,.$$

De novo, pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq n\} \leq \frac{\int f}{n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,,$$

já que $\displaystyle\int f < \infty$. Portanto, $\mathrm{m}\{f = \infty\} = 0$, mostrando que $f < \infty$ em q.t.p.

A função constante $f = 1 < \infty$ em todo ponto, mas $\displaystyle\int f = \infty$, logo a recíproca é falsa. □

Em seguida, consideramos a interpretação geométrica da integral de Lebsgue sem sinal, que é o análogo natural da de Riemann-Darboux.

Teorema 3. *(interpretação geométrica da integral sem sinal) Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, a região sob o gráfico de f,*

$$A_f := \big\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^d \ \ e \ \ 0 \leq t < f(x)\big\} \subset \mathbb{R}^{d+1}\,,$$

é mensurável à Lebesgue (em $\mathbb{R}^{d+1}$) e a sua medida no espaço ambiente é

$$\mathrm{m}(A_f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathrm{m}(x)\,.$$

Precisaremos saber algo sobre o produto cartesiano de conjuntos mensuráveis.

Exercício 1. Sejam $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ dois conjuntos mensuráveis em seus respectivos espaços euclidianos ambientes. Então, $E_1 \times E_2$ é mensurável em $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ e

$$\mathrm{m}(E_1 \times E_2) = \mathrm{m}(E_1)\,\mathrm{m}(E_2).$$

Demonstração do Teorema 3. Primeiro provamos a afirmação para uma função simples sem sinal. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i\, \mathbf{1}_{E_i}$ tal função, onde os conjuntos mensuráveis $E_i \subset \mathbb{R}^d$, $i \in [k]$ são disjuntos. Claramente, a região sobe o gráfico de s é

$$A_s := \bigcup_{i\in[k]} E_i \times [0, c_i)\,.$$

A união acima consiste em conjuntos disjuntos e (pelo exercício anterior) mensuráveis em $\mathbb{R}^{d+1}$, logo, A_s é mensurável e

$$\mathrm{m}(A_s) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i \times [0,c_i)\right) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i\right)\,\mathrm{m}\left([0,c_i)\right) = \sum_{i=1}^k c_i\,\mathrm{m}\left(E_i\right) = \int s\,,$$

provando a afirmação para a função s.

O caso geral, de uma função mensurável sem sinal f segue usando aproximação por funções simples. Seja $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções simples sem sinal tal que $s_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$. Não é difícil ver que as regiões sob os gráficos correspondentes satisfazem a mesma propriedade de monotonicidade para cima, ou seja,

$$A_{s_n} \nearrow A_f \quad \text{quando} \;\; n \to \infty\,.$$

De fato, dados $x \in \mathbb{R}^d$ e $n \in \mathbb{N}$, se $t < s_n(x)$ então $t < s_{n+1}(x)$, logo $A_{s_n} \subset A_{s_{n+1}}$. Além disso, se $(x,t) \in A_f$, então $0 \leq t < f(x) = \sup_{n\geq 1} s_n(x)$, portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ para qual $t < s_N(x)$, mostrando que $(x,t) \in A_{s_N}$.

Concluímos o seguinte: A_f é mensurável (já que os conjuntos A_{s_n} são mensuráveis, pois s_n são funções simples) e

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A_{s_n}) \to \mathrm{m}(A_f) &\quad \text{(pelo teorema de convergência monótona para conjuntos)}\\ \int s_n \to \int f &\quad \text{(pelo teorema de convergência monótona para funções)}\\ \mathrm{m}(A_{s_n}) = \int s_n &\quad \text{(já que } s_n \text{ são funções simples),} \end{aligned}$$

portanto $\mathrm{m}(A_f) = \displaystyle\int f$. □

Vale notar que o gráfico de uma função mensurável, como conjunto de co-dimensão 1 no espaço ambiente, é negligenciável.

Exercício 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, o seu gráfico,

$$G_f := \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^d \;\text{ e }\; y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}\,,$$

é negligenciável.

O enunciado acima pode ser obtido usando-se adequadamente o teorema anterior, em relação à região sob o gráfico de uma função. Segue que, no final, a desigualdade estrita na definição do conjunto A_f no teorema anterior pode ser trocada por uma desigualdade não estrita.

Funções absolutamente integráveis

Começamos com o conceito de função mensurável à Lebesgue com sinal.

Definição 1. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada mensurável à Lebesgue se existir uma sequência de funções simples $\{s_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.

Observação 1. Lembre-se que dado $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ := \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- := \max\{-c, 0\}$$

Então,

$$c^+, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-$$

e

$$c = 0 \Leftrightarrow c^+ = c^- = 0$$

Além disso, dada uma sequência de números $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$x_n \to x \quad \text{se e somente se} \quad x_n^+ \to x^+ \quad \text{e} \quad x_n^- \to x^-$$

Ademais, se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções, então

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p. se e somente se} \quad f_n^+ \to f^+ \quad \text{em q.t.p e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p}$$

O seguinte teorema fornece uma caracterização do conceito de mensurabilidade para funções com sinal, análogo ao Teorema 1 da aula 13.

Teorema 4. *Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência de funções simples com sinal $\{s_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.
(2) f^+ e f^- são mensuráveis à Lebesgue.
(3) Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.
(4) Para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.
(5) Para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.
(6) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

As outras afirmações do tipo $\{f \geq \lambda\}, \{f < \lambda\}$ ou $\{f \leq \lambda\}$ mensuráveis também são equivalentes às afirmações acima.

Demonstração do Teorema 4. A prova da equivalência entre as afirmações de (3) até (6) é completamente análoga à do Teorema 1 da aula 13.

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções simples (com sinais) tal que $s_n \to f$ em q.t.p. Pela observação anterior, $s_n^+ \to f^+$ e $s_n^- \to f^-$ em q.t.p. Como s_n^+, s_n^- são funções simples (sem sinais), segue que f^+ e f^- são mensuráveis

(2) $\Rightarrow$ (1) Existem duas sequências de funções simples sem sinais, $s_n \to f_n^+$ e $\sigma_n \to f^-$. Podemos supor que para todo $n \geq 1$, s_n e σ_n moram em caixas, então são finitas em todo ponto. Portanto, a função $s_n - \sigma_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- = f,$$

provando que f é mensurável.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Vamos considerar separadamente os casos $0 \notin I$ e $0 \in I$.

- Se $0 \notin I$, como I é conexo, ou $I \subset (0, \infty)$ ou $I \subset (-\infty, 0)$. Não é difícil ver que se $I \subset (0, \infty)$ então
$$\{f \in I\} = \{f^+ \in I\}$$
que é mensurável, pois f^+ é mensurável. Similarmente, se $I \subset (-\infty, 0)$, que equivale a $-I \subset (0, \infty)$, temos
$$\{f \in I\} = \{f^- \in -I\}$$
que também é mensurável, pois f^- é mensurável e $-I$ é um intervalo.
- Se $0 \in I$, então
$$I = I^+ \cup I^- \cup \{0\}$$
onde
$$I^+ := I \cap (0, \infty) \quad \text{e} \quad I^- := I \cap (-\infty, 0)\,.$$
Portanto,
$$\{f \in I\} = \{f \in I^+\} \cup \{f \in I^-\} \cup \{f = 0\}\,.$$
Pelo caso anterior, $\{f \in I^+\}$ e $\{f \in I^-\}$ são mensuráveis, enquanto
$$\{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}$$
que também é mensurável. Portanto, em todos os caso, $\{f \in I\}$ é, de fato, mensurável.

(6) $\Rightarrow$ (2) Seja $\lambda \geq 0$. Temos que
$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$
pois $f^+(x) = f(x)$ sempre que $f(x) > 0$ e $f^+(x) = 0$ no caso contrário. Como $\{f > \lambda\}$ é mensurável e $\lambda \geq 0$ é arbitrário, segue que f^+ é mensurável. Similarmente, dado $\lambda \geq 0$,
$$\{f^- > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$
que é um conjunto mensurável, logo f^-é uma função mensurável. $\square$

A seguir, apresentamos exemplos básicos de funções mensuráveis.

Teorema 5. *As seguintes valem:*

(1) Toda função contínua $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável.

(2) Se $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.

(3) Toda função simples é mensurável.

(4) Se $f = g$ em q.t.p e f é mensurável, então g é mensurável.

(5) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência pontualmente limitada de funções mensuráveis, então $\sup_{n\geq 1} f_n$ e $\inf_{n\geq 1} f_n$ são mensuráveis.

(6) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em q.t.p, então f é mensurável.

(7) Se f, g são mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$, então $f + g$, cf, $f\,g$ são mensuráveis.

(8) Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável também.

Demonstração do Teorema 5.

(1) Dado qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, como f é contínua,
$$\{f \in U\} = f^{-1}(U)$$
é aberto, logo mensurável, mostrando que a função f é mensurável.

(2) Dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, $\phi^{-1}(U)$ é aberto, pois ϕ é contínua. Mas
$$\{\phi \circ f \in U\} = \{f \in \phi^{-1}(U)\},$$
que é mensurável, pois f é mensurável. Logo, $\phi \circ f$ é mensurável.

(3) Seja $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função simples. A sequência constante $s_n = s$ para todo $n \geq 1$ converge para s, logo s é mensurável.

(4) Como f é mensurável, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples tal que $s_n \to f$ q.t.p. Mas como $g = f$ em q.t.p. segue que $s_n \to g$ q.t.p., provando a mensurabilidade de g.

(5) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,
$$\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq \lambda\} = \bigcap_{n\geq 1}\{f_n \leq \lambda\} \quad \text{e} \quad \{\inf_{n\geq 1} f_n \geq \lambda\} = \bigcap_{n\geq 1}\{f_n \geq \lambda\}$$
Como os conjuntos $\{f_n \leq \lambda\}, \{f_n \geq \lambda\}$ são mensuráveis para todo $n \geq 1$, pois f_n são funções mensuráveis, segue que $\sup_{n\geq 1} f_n$ e $\inf_{n\geq 1} f_n$ são funções mensuráveis.

(6) Se $f_n \to f$ em q.t.p, então
$$f_n^+ \to f^+ \quad \text{e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p}$$
Pelo Teorema 4, paro todo $n \geq 1$, as funções sem sinais f_n^+ e f_n^- são mensuráveis, portanto f^+ e f^- também são mensuráveis. Pelo teorema anterior, f é mensurável.

(7) Existem sequências de funções simples $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$. Então, para todo $n \geq 1$,
$$s_n + \sigma_n, \quad cs_n \quad \text{e} \quad s_n \cdot \sigma_n$$
são simples e
$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad cs_n \to cf, \quad s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g$$
provando a mensurabilidade de $f + g$, cf e $f\,g$.

(8) Pelo Teorema 4, as funções f^+ e f^-1 são mensuráveis, então $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também.

□

Integrabilidade absoluta

Definição 2. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada absolutamente integrável à Lebesgue se f é mensurável à Lebesgue e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|\, d\,\mathrm{m} < \infty$. Neste caso, definimos
$$\int_{R^d} f\, d\,\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} f^+\, d\,\mathrm{m} - \int_{\mathbb{R}^d} f^-\, d\,\mathrm{m}\,.$$

Observação 2. Como $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$, pela monotonicidade da integral sem sinal, tem-se
$$0 \leq \int f^+, \int f^- \leq \int |f| < \infty$$
logo $\displaystyle\int f^+, \int f^- \in \mathbb{R}$, então
$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}$$
Assim, a integral de Lebesgue de uma função absolutamente integrável é bem definida.

Observação 3. Suponha que $f = f_1 - f_2$ seja uma representação de f como uma diferença de funções mensuráveis sem sinais f_1 e f_2, onde $\int f_1, \int f_2 < \infty$. Então, $\int f = \int f_1 - \int f_2$.

De fato, como $f_1 - f_2 = f = f^+ - f^-$, temos

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2,$$

onde f_1, f^-, f^+, f_2 são funções mensuráveis *sem* sinais. Pela aditividade da integral sem sinal, tem-se

$$\int f_1 + \int f^- = \int f^+ + \int f_2\,,$$

logo,

$$\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

A maioria das propriedades da integral sem sinal também vale para funções absolutamente integráveis.

Teorema 6. *Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$*

(1) (linearidade) $f + g$ e cf são absolutamente integráveis e $\int (f+g) = \int f + \int g$, $\int cf = c \int f$.

(2) (monotonicidade) Se $f \le g$ em q.t.p, então $\int f \le \int g$.

(3) (a desigualdade triangular) $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

(4) (divisibilidade) Se E é um conjunto mensurável, então $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são absolutamente integráveis e $\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$.

Demonstração do Teorema 6.

(1) Pelo Teorema 5 (6), $f + g$ e cf são mensuráveis. Além disso, como $|f + g| \le |f| + |g|$ e $|f + g|, |f|, |g|$ são funções mensuráveis sem sinal, pela monotonicidade e linearidade da integral sem sinal temos

$$\begin{aligned}\int |f+g| &\le \int (|f| + |g|)\\ &= \int |f| + \int |g| < \infty\end{aligned}$$

mostrando a integrabilidade absoluta de $f + g$.

Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$, temos que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),\ (f^+ + g^+) \text{ e } (f^- + g^-)$$

são funções mensuráveis sem sinais e, pela observação anterior,

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-)\\ &= \left(\int f^+ + \int g^+\right) - \left(\int f^- + \int g^-\right) \quad \text{(pela linearidade da integral sem sinal)}\\ &= \left(\int f^+ - \int f^-\right) + \left(\int g^+ - \int g^-\right)\\ &= \int f + \int g\,.\end{aligned}$$

A prova da identidade $\displaystyle\int cf = c\int f$ é exercício.

(2) $f \leq g$ em q.t.p implica $g - f \geq 0$ q.t.p. Portanto, $\displaystyle\int (g-f) \geq 0$. Mas , $g = f + (g-f)$ e, pela aditividade da integral,

$$\int g = \int f + \int (g-f) \geq \int f\,.$$

(3) Temos que $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$. Pela monotonicidade da integral,

$$\int f \leq \int |f| \qquad \text{e} \qquad \int (-f) \leq \int |f|$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int f\right| &= \max\left\{\int f, -\int f\right\}\\ &= \max\left\{\int f, \int (-f)\right\} \leq \int |f|\,.\end{aligned}$$

(4) Como $\mathbf{1}_E$ e $\mathbf{1}_{E^\complement}$ são funções simples, logo mensuráveis, pelo Teorema 5, $f\cdot\mathbf{1}_E$ e $f\cdot\mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso, $|f\cdot\mathbf{1}_E| \leq |f|$ então $\displaystyle\int |f\cdot\mathbf{1}_E| \leq \int |f| < \infty$, mostrando que $f\cdot\mathbf{1}_E$ é absolutamente integrável. O mesmo vale para $f\cdot\mathbf{1}_{E^\complement}$. Claramente,

$$f = f\cdot\mathbf{1}_E + f\cdot\mathbf{1}_{E^\complement}$$

e usando a linearidade da integral, segue que

$$\int f = \int f\cdot\mathbf{1}_E + \int f\cdot\mathbf{1}_{E^\complement}\,.$$

□

Observação 4. Dados uma função absolutamente integrável $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável E, denotamos por

$$\int_E f\,d\mathrm{m} := \int f\cdot\mathbf{1}_E\,d\mathrm{m}\,.$$

A propriedade da divisibilidade se torna

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f\,.$$

Ademais, uma função $f\colon E \to \mathbb{R}$ é dita mensurável se a extensão dela por 0, $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in E\\ 0 & \text{se} \quad x \notin E\,.\end{cases}$$

for mensurável. Neste caso, $\displaystyle\int_E f\,d\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\,d\mathrm{m}$.