AULA 16: A COMPATIBILIDADE DA INTEGRAL DE LEBESGUE COM A INTEGRAL DE RIEMANN-DARBOUX

O objetivo da construção da integral de Lebesgue foi obter um conceito mais geral e mais flexível. Provamos que, de fato, a integral de Lebesguq é uma extensão da integral de Riemann-Darboux.

Exercício 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função contínua em q.t.p.. Então f é mensurável à Lebesgue.

Observação 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável localizada em uma caixa. Então f é absolutamente integrável.

De fato, se $[-K, K] \times [-M, M]$ é a caixa onde f mora, isto é, se

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo} \, \|x\| > K \text{ e}$$
$$|f(x)| \le M \quad \text{para todo } \|x\| \le K,$$

então

$$|f| \le M\, \mathbf{1}_{[-K,K]^d},$$

logo

$$\int |f| \, d\mathrm{m} \le \int M\, \mathbf{1}_{[-K,K]^d} \, d\mathrm{m} \le M(2K)^d < \infty.$$

Teorema 1. *Seja $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann-Darboux. Então f é absolutamente integrável e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mathrm{m}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Lebesgue para funções integráveis à Riemann, f é contínua em quase todo ponto. Pelo exercício anterior f é mensurável.

Além disso, f é limitada, o suporte dela, o intervalo $[a, b]$, é limitado, então f mora em uma caixa. Pela observação anterior f é absolutamente integrável.

Para provar a igualdade entre a integrais de Riemann-Darboux e a de Lebesgue, consideramos no início uma função escada

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{I_k}.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} c_k \, |I_k| \, .$$

Uma função escada também é simples, então

$$\int_{[a,b]} s \, d\mathrm{m} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathrm{m}(I_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \, |I_k| \, .$$

Vamos considerar o caso geral de uma função integrável a Riemann-Darboux qualquer.

Dado $\epsilon > 0$, como f é Darboux integrável, existem duas funções escada $s \le f \le \sigma$ tais que

$$\int_a^b \sigma \; - \int_a^b s \; \le \epsilon.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b \sigma.$$

Por outro lado, toda função escada também é simples, e pela monotonicidade da integral de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} s \le \int_{[a,b]} f \le \int_{[a,b]} \sigma.$$

Como os conceitos de integrabilidade já coincidem para funções escada, concluímos que

$$\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b \sigma \quad \text{e}$$
$$\int_a^b s \le \int_{[a,b]} f \le \int_a^b \sigma.$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f - \int_{[a,b]} f \right| \le \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como ϵ foi arbitrário, segue que

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

□

Exercício 2. Se a integral imprópria f em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é convergente, então f é absolutamente integrável e sua integral de Lebesgue coincide com sua integral de Riemann imprópria.

Essa formulação é um pouco vaga, parte do exercício é esclarecê-la.

O espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$

Seja $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as funções absolutamente integráveis à Lebesgue. Então $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço vetorial e a integral de Lebesgue é uma transformação linear neste espaço. O objetivo é definir uma norma em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Note que, dada f em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, se $\int |f| \, dm = 0$, então $|f| = 0$ em q.t.p., logo $f = 0$ em q.t.p. (mas não necessariamente em todo ponto). Então, $\int |f| \, dm = 0$ não implica $f = 0$.

A relação

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f = g \quad \text{em} \quad \text{q.t.p.}$$

é uma equivalência em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Seja

$$L^1(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)/\sim$$

o espaço quociente correspondente.

Sempre identificamos uma classe de equivalência, ou seja, um elemento do espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ com qualquer representante dela. Portanto, dizemos "Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ uma função" em vez de "Seja $[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$, onde f é um representante desta classe de equivalência".

Isso é consistente com a filosofia de Lebesgue que afirma que conjuntos de medida zero não importam nesta teoria.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f| \; d\mathrm{m}.$$

A função $\|\cdot\|_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ é uma norma.

- $\|f\|_1 = \int |f| \geq 0$ e se $\int |f| = 0$, então $f = 0$ em q.t.p., ou seja $f \sim 0$ (a função constante 0).
- se $c \in \mathbb{R}$ então
$$\|cf\|_1 = \int |cf| = \int |c|\,|f| = |c| \int |f| = |c|\,\|f\|_1 .$$
- se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então f e g são absolutamente integráveis, logo $f + g$ também é absolutamente integrável e
$$|f + g| \leq |f| + |g|$$
em todo ponto.

  Pela monotonicidade da integral,
$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \leq \int \big(|f| + |g| \big) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 ,$$
mostrando a desigualdade triangular.

Concluímos que $L^1(\mathbb{R}^d)$ munido com $\|\cdot\|_1$, chamada “a norma um”, é um espaço normado. Provaremos mais tarde que é, na verdade um espaço de Banach.

A seguir re-enunciaremos a desigualdade de Markov no contexto de funções absolutamente integráveis.

Teorema 2 (a desigualdade de Chebyshev). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Demonstração. A função $|f|$ é mensurável e sem sinal, logo, pela desigualdade de Markov,

$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\int |f| \, d\mathrm{m}}{\lambda} = \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

□

Para finalizar, vamos provar a invariância por translações da integral de Lebesgue. A prova usa um argumento muito comum na teoria da medida, que chamamos do “mecanismo padrão”.

Teorema 3 (invariância por translações). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^d$, seja $f_a \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,*

$$f_a(x) := f(x + a)$$

a translação de f por a. Então f_a é absolutamente integrável e

$$\int f(x + a) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Demonstração. A prova do teorema consiste em alguns passos.

Passo 1: A função f é a função indicadora de um conjunto mensurável:

$$f = \mathbf{1}_E.$$

Então,

$$f_a(x) = f(x + a) = \mathbf{1}_E(x + a) = \mathbf{1}_{E-a}(x).$$

Pela invariância por translação da medida de Lebesgue, o conjunto $E - a$ é mensurável e

$$\mathrm{m}(E - a) = \mathrm{m}(A),$$

provando a mensurabilidade de f_a e também que

$$\int f_a d\mathrm{m} = \int \mathbf{1}_{E-a} d\mathrm{m} = \mathrm{m}(E-a) = \mathrm{m}(E) = \int \mathbf{1}_E d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 2: A função f é uma função simples, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_1},$$

onde E_i são conjuntos mensuráveis.

Pelo passo anterior e a linearidade da integral, neste caso

$$f_a = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i - a}$$

também é simples e

$$\int f_a d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 3: Suponha que $f\colon \mathbb{R}^d \to [a, b]$ é uma função mensurável sem sinal. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$s_n \to f(x) \text{ quando } n \to \infty.$$

Então,

$$s_n(x+a) \to f(x+a) \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, f_a é mensurável e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int f(x+a) d\mathrm{m} = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x+a) d\mathrm{m} = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Passo 4: Finalmente, dada uma função absolutamente integrável $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, considerando a sua representação

$$f = f^+ - f^-, \text{ onde } f^+, f^- \geq 0,$$

pelo passo anterior segue que f_a^+, f_a^- são mensuráveis, logo f_a é mensurável e

$$\int f_a = \int f_a^+ - \int f_a^- = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

□

O *mecanismo padrão* pode ser usado para provar afirmações do tipo

"para toda função mensurável, vale uma certa propriedade".

O argumento consiste em estabelecer essa propriedade passo a passo, para:

(1) Funções indicadoras de conjuntos mensuráveis. Neste caso, a propriedade se torna uma afirmação sobre conjuntos mensuráveis.
(2) Funções simples. Neste caso, usamos a possível linearidade da propriedade a ser estabelecida.
(3) Funções simples sem sinais. Neste caso, usamos a aproximação de funções mensuráveis por funções simples e, possivelmente, alguns teoremas de limite para a integral de Lebesgue.
(4) Funções absolutamente integráveis. Usamos a representação $f = f^+ - f^-$ de tal função e a linearidade da propriedade dada.

Os três princípios de Littlewood

Os princípios de Littlewood transmitem a intuição básica da teoria da medida de Lebesgue.

O primeiro: Todo conjunto mensurável é "quase" aberto.

Além disso, todo conjunto mensurável com medida finita está perto de um conjunto elementar (isto é, de uma união finita de caixas).

O segundo: Toda função absolutamente integrável é "quase" contínua.

O terceiro: Toda sequência de funções mensuráveis, convergente em q.t.p. é "quase" uniformemente convergente.

Em outras palavras, o conceito tangível, real (a mensurabilidade de um conjunto, de uma função, ou de convergência pontual de uma sequência de funções mensuráveis) pode ser visto como "quase" o conceito ideal correspondente (de conjunto aberto ou elementar, de função contínua, de convergência uniforme).

Porém, o diabo está nos detalhes.

O primeiro princípio de Littlewood

Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue se para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto U tal que

$$U \supset E \quad \text{e} \quad \mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon.$$

Esta afirmação foi escolhida como nossa definição do conceito de conjunto mensurável. Como já vimos, ela é equivalente a outras definições, por exemplo a de Carathéodory (que será usada em contextos mais abstratos).

Além disso, provamos que se $E \subset \mathbb{R}^d$ for mensurável e $\mathrm{m}(E) < \infty$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar $B = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_k$ tal que $\mathrm{m}^\star(E \triangle B) < \epsilon$.

As caixas $B_1, \ldots, B_k$ podem ser escolhidas como caixas diádicas (da mesma geração).

O segundo princípio de Littlewood

Teorema 4. *(de Lusin) Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente integrável. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $E \subset \mathbb{R}^d$ mensurável tal que*

$$\mathrm{m}(E^{\complement}) \le \epsilon \quad \textit{e} \quad f|_E \quad \textit{é contínua.}$$

Observação 2. A informação de que $f|_E$ é contínua *não* significa que f é contínua em E.

De fato, dado $x_0 \in E$, $f|_E$ é contínua no ponto x_0 significa

$$\lim_{x \in E,\, x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

embora f contínua no ponto x_0 significa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Por exemplo, a função $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua em *nenhum* ponto, mas $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$ que é, evidentemente, contínua em todo ponto do seu domínio.

A prova do teorema de Lusin usa um resultado de aproximação em $L^1(\mathbb{R}^d)$, útil em si.

Definição 1. Uma função $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada de função *escada* se

$$s = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{1}_{B_j},$$

onde $c_j \in \mathbb{R}$ e B_j é uma *caixa* para todo $j \in [k]$.

Em particular, toda função escada é simples e mora numa caixa.

Teorema 5. *(aproximação de uma função absolutamente integrável) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\epsilon > 0$.*

(1) Existe uma função simples s, que mora numa caixa, tal que $\|f - s\|_1 < \epsilon$.

(2) Existe uma função escada σ tal que $\|f - \sigma\|_1 < \epsilon$.

(3) Existe uma função contínua g, com suporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

Observação 3. Pela Observação 1 da Aula 18, toda função mensurável que mora numa caixa é absolutamente integrável, ou seja, pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Denotamos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ o espaço vetorial de funções contínuas com suportes compactos. Tais funções são claramente também limitadas (e mensuráveis). Então toda função $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ é mensurável e mora numa caixa, logo $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.

Portanto, o teorema de aproximação acima pode ser reformulado do seguinte modo: cada um dos espaços de funções

(1) o espaço de funções simples,

(2) o espaço de funções escada,

(3) o espaço $C_c(\mathbb{R}^d)$ de funções contínuas com suporte compacto

é *denso* em $L^1(\mathbb{R}^d)$ com respeito à sua norma $\|\cdot\|_1$.

Demonstração do Teorema 5. (1) Consideramos primeiro o caso $f \geq 0$. Como

$$\int f \, dm = \sup \Big\{ \int s \, dm \colon 0 \leq s \leq f, \quad s \text{ é simples e mora numa caixa} \Big\},$$

e como $\int f dm = \|f\|_1 < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe uma função simples s que mora numa caixa tal que

$$0 \leq s \leq f \quad \text{e} \quad \int f \, dm < \int s \, dm + \epsilon.$$

Segue que

$$\|f - s\|_1 = \int |f - s| \; dm = \int (f - s) \, dm = \int f \, dm - \int s \, dm < \epsilon.$$

Considerando agora uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qualquer, escrevemos $f = f^+ - f^-$, onde $f^+, f^- \geq 0$ e $\int f^+ \, dm, \int f^- \, dm < \infty$. Pelo caso anterior, existem duas funções simples que moram em caixas, s_1 e s_2, tais que

$$\left\|f^+ - s_1\right\|_1 < \epsilon \quad \text{e} \quad \left\|f^- - s_2\right\|_1 < \epsilon.$$

Logo, a função $s := s_1 - s_2$ é simples, mora em uma caixa e

$$\begin{aligned} \|f - s\|_1 &= \left\|(f^+ - f^-) - (s_1 - s_2)\right\|_1 = \left\|(f^+ - s_1) - (f^- - s_2)\right\|_1 \\ &\leq \left\|f^+ - s_1\right\|_1 + \left\|f^- - s_2\right\|_1 < 2\epsilon, \end{aligned}$$

mostrando a densidade em $L^1(\mathbb{R}^d)$ do espaço de funções simples e localizadas em caixas.

(2) Pelo item anterior, baixa provar que toda função simples s, que mora em uma caixa, pode ser aproximada em $L^1(\mathbb{R}^d)$ por funções escada. Sejam $\epsilon > 0$ e

$$s = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{E_j}$$

onde, para todo $j \in [k]$, $c_j \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{m}(E_j) < \infty$ (s tem suporte limitado, então de medida finita). Pelo primeiro princípio de Littlewood, para cada $j \in [k]$, existe um conjunto *elementar* B_j tal que

$$\mathrm{m}(E_j \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{M},$$

onde $M := \sum_{j=1}^k |c_k| < \infty$.

Como $\left|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right| = \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j}$, temos que

$$\left\|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right\|_1 = \int \left|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right| = \int \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j} = \mathrm{m}(E_j \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{M}\,.$$

Seja

$$\sigma := \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j}\,.$$

Então σ é uma função escada (já que B_j, $j \in [k]$ são conjuntos elementares, então podem ser representados como uniões de caixas).

Além disso,

$$\begin{aligned} \|f - \sigma\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{E_j} - \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j} \right\|_1 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^k c_j \left(\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right) \right\|_1 \\ &\le \sum_{j=1}^k |c_j| \left\|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right\|_1 < M\,\frac{\epsilon}{M} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

(3) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\epsilon > 0$. Pelo item (2), existe uma função escada

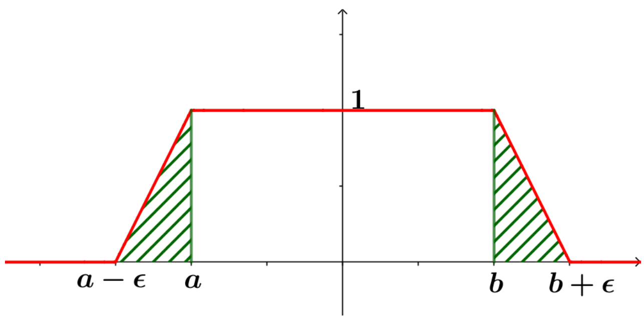
$$\sigma := \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j} \quad \text{tal que} \quad \|f - \sigma\|_1 < \epsilon\,,$$

onde, para todo $j \in [k]$, $c_j \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0$ e B_j é uma caixa.

Dada uma caixa $B \subset \mathbb{R}^d$ e dado $\epsilon > 0$, existe $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \le \epsilon\,.$$

Isso é fácil de ver em dimensão $d = 1$. De fato, se $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$, h pode ser escolhida como uma função linear por partes, veja abaixo.



Então h é contínuas, $\mathrm{supp}(h) \subset [a - \epsilon, b + \epsilon]$ e

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 = \int |\mathbf{1}_B - h| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Em dimensão maior, se $B = I_1 \times \ldots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ é uma caixa, para cada intervalo I_j, $j \in [d]$, considere uma função $h_j \in C_c(\mathbb{R})$ como acima e defina $h \colon R^d \to \mathbb{R}$,

$$h(x_1, \ldots, x_d) := h_1(x_1) \cdot \ldots \cdot h_d(x_d) .$$

Já que

$$\mathbf{1}_B(x_1, \ldots, x_d) = \mathbf{1}_{I_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}_{I_d}(x_d),$$

é fácil concluir que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \leq d\,\epsilon.$$

Voltando à função escada

$$\sigma := \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{B_j} ,$$

onde B_j, $j \in [k]$ são caixas, pelo argumento apresentado acima, existem funções $g_1, \ldots, g_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\left\|\mathbf{1}_{B_j} - g_j\right\|_1 < \frac{\epsilon}{M} ,$$

para todo $j \in [k]$, onde $M := \sum_{j=1}^k |c_j| < \infty$.

Definindo

$$g := \sum_{j=1}^{k} c_j g_j ,$$

segue que $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ e

$$\begin{aligned}
\|\sigma - g\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{E_j} - \sum_{j=1}^{k} c_j g_j \right\|_1 \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} |c_j| \left\|\mathbf{1}_{E_j} - g_j\right\|_1 \\
&< M \, \frac{\epsilon}{M} = \epsilon .
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - \sigma\|_1 + \|\sigma - g\|_1 < 2\epsilon,$$

o que finaliza a prova do teorema.

□

Estamos prontos para provar o teorema de Lusin.

Demonstração do Teorema 4. Fixe $\epsilon > 0$. Pelo teorema de aproximação em $L^1(\mathbb{R}^d)$, para todo $n \geq 1$ existe $g_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{\epsilon}{4^n},$$

ou seja, *em média*, g_n está perto de f.

Pela desigualdade de Chebyshev, isto implica a proximidade *pontual* entre g_n e f, exceto por um conjunto de pontos com media relativamente pequena. De fato, para todo $n \geq 1$, o conjunto

$$F_n := \left\{ |f - g_n| > \frac{1}{2^n} \right\}$$

é mensurável e

$$\mathrm{m}(F_n) \leq \frac{\|f - g_n\|_1}{1/2^n} < \frac{\epsilon}{4^n}\, 2^n = \frac{\epsilon}{2^n} .$$

Seja $F := \bigcup_{n\geq 1} F_n$.
Então, F é mensurável e

$$\mathrm{m}(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) = \epsilon \,.$$

Finalmente, seja $E := F^{\complement}$. Então E é mensurável, $\mathrm{m}(E^{\complement}) = \mathrm{m}(F) \leq \epsilon$ e, como veremos, $f|_E$ é contínua.

Para estabelecer a continuidade de $f|_E$, basta verificar que

$$g_n|_E \to f|_E \quad \text{uniformemente} \,,$$

já que as funções g_n são contínuas em $\mathbb{R}^d$, então são contínuas quando restritas ao conjunto E.

De fato, se $x \in E = F^{\complement} = \bigcap_{n\geq 1} F_n^{\complement}$, então $x \notin F_n$ para todo $n \geq 1$, logo

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$$

mostrando a convergência uniforme de $g_n|_E$ para $f|_E$, e portanto a continuidade de $f|_E$. □

O terceiro princípio de Littlewood

Definição 2. Sejam $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável e $\{f_n \colon E \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções. Dizemos que

$$f_n \to f \quad \text{localmente uniformemente em } E$$

se para todo ponto $x \in E$ existe $r > 0$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente em } E \cap B(x, r) \,.$$

Observação 4. Não é difícil verificar a equivalência das seguintes afirmações:

(i) $f_n \to f$ localmente uniformemente em E;
(ii) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap K$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$;
(iii) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap L$ para todo conjunto limitado $L \subset \mathbb{R}^d$;
(iv) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0, R)$ para todo $R > 0$.

O terceiro princípio de Littlewood é formalmente expresso pelo teorema de Egorov.

Teorema 6 (de Egorov)**.** *Seja $\left\{f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\right\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_n \to f \quad \textit{pontualmente em} \quad \textit{q.t.p.}$$

Seja $\epsilon > 0$. Então existe um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\mathrm{m}(E^{\complement}) < \epsilon$ e

$$f_n \to f \quad \textit{localmente uniformemente em } E \,.$$

Demonstração. Para tornar uma afirmação *pontual* em uma afirmação algo *uniforme*, o procedimento comum é usar um argumento de tempos de parada.

Como $f_n \to f$ em quase todo ponto, existe um conjunto $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^d$ com $\mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0$ tal que

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z}.$$

Então, para todo $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z}$ e para todo $m \geq 1$, existe $N(x, m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{para todo } n \geq N(x, m) \,. \tag{1}$$

Para todo $m, N \in \mathbb{N}$ definimos o "evento favorável"

$$G_{m,N} := \left\{ |f_n - f| \leq \frac{1}{m} \quad \forall n \geq N \right\} \,.$$

Fixe $m \geq 1$. Então $G_{m,N}$ é mensurável e, claramente, pela equação (1),

$$G_{m,N} \nearrow \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } N \to \infty.$$

Definimos o evento complementar (então não favorável)

$$F_{m,N} := G_{m,N}^{\complement}.$$

Temos que

$$F_{m,N} \searrow \mathcal{Z} \quad \text{quando } N \to \infty \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0\,.$$

Não podemos concluir que $\mathrm{m}(F_{m,N}) \to 0$ quando $N \to \infty$ já que os conjuntos $F_{m,N}$ podem ter medida infinita. O truque, então, é localizar $F_{m,N}$ dentro de uma bola determinada, por exemplo $B(0,m)$.

De fato, $F_{m,1} \cap B(0,m)$ tem medida finita pois é um conjunto limitado,

$$F_{m,N} \cap B(0,m) \searrow \mathcal{Z} \cap B(0,m) \quad \text{quando } N \to \infty,$$

e $\mathcal{Z} \cap B(0,m) \subset \mathcal{Z}$ tem medida zero. Logo, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, tem-se

$$\mathrm{m}\left(F_{m,N} \cap B(0,m)\right) \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to \infty\,.$$

Segue que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{m}\left(F_{m,N_m} \cap B(0,m)\right) < \frac{\epsilon}{2^m}\,.$$

Seja

$$F := \bigcup_{m \geq 1} \left(F_{m,N_m} \cap B(0,m)\right)\,.$$

Então F é mensurável e $\mathrm{m}(F) \leq \epsilon$. Seja

$$\begin{aligned} E := F^{\complement} &= \bigcap_{m \geq 1} \left(F_{m,N_m} \cap B(0,m)\right)^{\complement} \\ &= \bigcap_{m \geq 1} G_{m,N_m} \; \cup B(0,m)^{\complement}\,. \end{aligned}$$

Resta provar que $f_n \to f$ localmente uniformemente em E. Fixe uma bola $B(0,R)$. Vamos provar que $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0,R)$.

Seja $m \geq R$. Então, como $B(0,R) \subset B(0,m)$, dado $x \in E \cap B(0,R) \subset B(0,m)$, tem-se $x \in G_{m,N_m}$. Logo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{para todo} \quad n \geq N_m\,.$$

Como a escolha da escala de tempo N_m *não* depende do ponto $x \in E \cap B(0,R)$, segue que, de fato, $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0,R)$. □