AULA 17: ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

σ-ÁLGEBRAS E ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1. Dado um conjunto X, uma σ-álgebra sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,
(2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^{\complement} \in \mathcal{B}$,
(3) se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto (o espaço ambiente) e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sobre X é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

Observação 1. Note que o espaço ambiente $X = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{B}$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n\geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n^{\complement} \right)^{\complement} \in \mathcal{B}\,.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de σ-álgebras.

Exemplo 1 (de σ-álgebras)**.** Seja X um espaço ambiente.

(1) A σ-álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$.
(2) A σ-álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E : E \subset X\}$.
(3) A σ-álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$$

de X em "átomos", seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha : \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a σ-álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \varnothing \sqcup X,$$

enquanto a σ-álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\}\,.$$

(4) A σ-álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real $\mathbb{R}$ em intervalos diádicos de geração n,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a σ-álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

Geração de σ-álgebras. Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que $\mathcal{B}'$ é *mais fina* do que $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é mais grosseira do que $\mathcal{B}'$.

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de σ-álgebras sobre X também é uma σ-álgebra sobre X, o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 2. Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço ambiente X, seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{B} \colon \mathcal{B} \supset \mathcal{F},\, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma - \text{álgebra}\} \, .$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra sobre X chamada a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Ela é a menor (ou a mais grosseira) σ-álgebra que contém a coleção $\mathcal{F}$.

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como 2^X é uma σ-álgebra, a interseção de σ-álgebras acima é bem definida.

Definição 3 (a σ-álgebra de Borel)**.** Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a σ-álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \left\{ U \subset \mathbb{R}^d \colon U \text{ aberto} \right\} \, .$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer $(X, \mathcal{T})$,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{ U \subset X \colon U \text{ aberto} \}$$

é chamada a σ-álgebra de Borel do espaço $(X, \mathcal{T})$.

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos*.

Exemplo 2 (de conjuntos borelianos)**.** Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo F_σ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo G_δ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

O mecanismo padrão para conjuntos. Considere uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$. Dada uma propriedade P sobre subconjuntos de X, para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

(1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;
(2) A coleção

$$\mathcal{A} := \{ E \subset X \colon P(E) \text{ vale} \}$$

é uma σ-álgebra, ou seja,
- $P(\varnothing)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^\complement)$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n \geq 1} E_n)$ vale.

Proposição 1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em X.*

Demonstração. Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y.

(1) Para todo conjunto aberto E in Y, como f é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.

(2) Seja

$$\mathcal{A} := \left\{ E \in \mathcal{B}(Y) \colon f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \right\} .$$

Tem-se

- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma σ-álgebra, $f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^{\complement}) = f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma σ-álgebra, segue que

$$f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X) ,$$

mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

□

Observação 2. A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira de a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(R^d) .$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a σ-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função "escada do diabo" de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

Exercício 1. Sejam $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor e $c\colon [0, 1] \to [0, 1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f\colon [0, 1] \to [0, 2], \quad f(x) = x + c(x) .$$

Então,

(i) f é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente(crescente, portanto é *bi-contínua.*

(ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função f é mensurável e

$$\mathrm{m}(f(\mathcal{C})) = 1 .$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

(iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C} .$$

Então E é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

Proposição 2. *Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:*

(i) A família de conjuntos abertos.
(ii) A família de conjuntos fechados.
(iii) A família de conjuntos compactos.
(iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).
(v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).

Demonstração. Exercício. □

Medidas abstratas

Definição 4. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função

$$\mu \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

é chamada de *medida* (σ-aditiva) em $(X, \mathcal{B})$ se

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ e
(ii) para toda coleção mensurável de conjuntos mensuráveis *disjuntos* $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo em um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre X e uma medida μ em $(X, \mathcal{B})$ é chamada de *espaço de medida*.

Em seguida apresentamos alguns exemplos de espaços de medida.

Exemplo 3. O espaço da medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$. A medida m é também referida como a medida de volume.

Um outro exemplo comum é o espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ da medida de Borel, ou seja, o espaço de Borel munido com a restrição da medida de volume.

Exemplo 4. A medida trivial em $(X, \mathcal{B})$: $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

Exemplo 5 (a medida de Dirac)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável qualquer e seja $x \in X$ um ponto. A medida de Dirac com centro em x é dada por

$$\delta_x \colon \mathcal{B} \to [0, \infty), \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases} = \mathbf{1}_E(x)\,.$$

Note que a função δ_x é, de fato, uma medida:

(i) $\delta_x(\varnothing) = \mathbf{1}_\varnothing(x) = 0$.
(ii) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned} \delta_x\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) &= \mathbf{1}_{\bigsqcup_{n\geq 1} E_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)\,. \end{aligned}$$

Exemplo 6 (soma de medidas de Dirac ou de pontos de massa)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Dados pontos $x_1, \dots, x_k \in X$ e números $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, seja

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i\, \delta_{x_i}\,.$$

Então μ é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício) chamada de soma de medidas de Dirac com massa concentrada em $x_1, \ldots, x_k$ e pesos $c_1, \ldots, c_k$.

A ideia é que além do volume (ou área, ou comprimento), a massa de um objeto também pode ser considerada como uma medida. Uma soma de medidas de Dirac corresponde ao caso de uma coleção *discreta* de centros de massa.

Exemplo 7. Mais geralmente, dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ de medidas em $(X, \mathcal{B})$ e uma sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de números não negativos,

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mu_n$$

é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício).

Exemplo 8 (medida de contagem)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. A medida de contagem é a função $\#\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\#(E) =$ a cardinalidade de E se E for finito e $\#(E) = \infty$ se E for um conjunto infinito.

Em seguida listamos algumas propriedades básicas de uma medida. Começamos com uma notação útil.

Notação. Dada uma sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos, usamos as seguintes notações:

- $E_n \nearrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n+1}$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$.
- $E_n \searrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$.

Proposição 3. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) (monotonicidade) Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(ii) (σ-subaditividade) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

(iii) (convergência monótona para conjuntos) Sejam $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{B}$.

- *Se $E_n \nearrow E$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*
- *Se $E_n \searrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. O argumento é idêntico ao da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e é deixado com exercício. $\square$

Da mesma forma que no caso da medida de Lebesgue, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 5. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é chamado *μ-negligenciável*, ou de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Uma propriedade $P(x)$ é válida para quase todo ponto $x \in X$ com respeito à medida μ, ou, de uma forma mais concisa, dizemos que $P(x)$ vale para μ-q.t.p. $x \in X$ se o conjunto

$$\{x \in X \colon P(x) \text{ não é válida}\}$$

é $\mathcal{B}$-mensurável e de medida nula.

Observação 3. Em geral, um subconjunto de um conjunto negligenciável *não* e necessariamente mensurável. Por exemplo, considerando o espaço da medida de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{m})$, o conjunto $E \subset \mathcal{C}$ do Exercício 1 não é boreliano, embora o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ seja boreliano e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

Esta observação motiva a seguinte definição.

Funções mensuráveis

__Definição__ Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f: X \to [0, \infty]$ é dita $\mathcal{B}$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) se para todo conjunto aberto U em $[0, \infty]$, temos

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U) \in \mathcal{B},$$

ou seja, se $\{f \in U\}$ é mensurável.

Similarmente, uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $\{f \in U\} \in \mathcal{B}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

__Observação__ Temos o seguinte

$$E \in \mathcal{B} \quad \text{sse} \quad 1_E \text{ é mensurável.}$$

De fato, como

$$E = \{1_E \in (0, 2)\},$$

se 1_E é mensurável segue que $E \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, supondo E mensurável e dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, como

$$\{1_E \in U\} = \begin{cases} X & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \in U \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \notin U \\ E & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \in U \\ E^c & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \notin U, \end{cases}$$

segue que $\{1_E \in U\} \in \mathcal{B}$, mostrando a mensurabilidade de 1_E.

<u>Proposição</u> Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, para todo conjunto <u>boreliano</u> $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\{f \in E\} \in \mathcal{B}.$$

<u>Demonstração</u> Utilizaremos o mecanismo padrão para conjuntos. Seja, então,

$$\mathcal{A} := \{ E \subset \mathbb{R} : \{f \in E\} \text{ é mensurável}\}.$$

Como f é mensurável, segue que $U \in \mathcal{A}$ para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.

De fato,

- $$\emptyset = \{f \in \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

- Se $E \in \mathcal{A}$ então $\{f \in E\} \in \mathcal{B}$,

logo
$$\{f \in E^c\} = \{f \in E\}^c \in \mathcal{B},$$
portanto $E^c \in \mathcal{A}$.

- Se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ então

$\{f \in E_n\} \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$. Como
$$\{f \in \bigcup_{n \geq 1} E_n\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \in E_n\} \in \mathcal{B},$$
segue que
$$\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}.$$

Concluímos que
$$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
já que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a menor σ-álgebra contendo os conjuntos abertos. $\square$

<u>Observação 2.</u> Em geral não é verdadeiro que dada uma função mensurável $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ é um conjunto (apenas) mensurável à Lebesgue $S \subset \mathbb{R}$,

$$\{ f \in S \} \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, considere a função do Exercício 1 da Aula 19:

$$f : [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x),$$

onde $c(x)$ é a função de Cantor.

Seja $g : [0,2] \to [0,1]$ a inversa de f e note que g é mensurável pois é contínua.

Considere (como no Exercício 1 da Aula 19) um conjunto não mensurável $N \subset f(\mathcal{C})$ e seja

$$E := g(N) = f^{-1}(N) \subset \mathcal{C}.$$

Então E é mensurável a Lebesgue, enquanto

$$N = g^{-1}(E) \text{ não é mensurável.}$$

<u>Definição 2.</u> Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função $S : X \to [0, \infty]$ é chamada de função simples sem sinal se

$$S = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i},$$

para alguns números $c_i \in [0, \infty]$ e conjuntos mensuráveis $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in [k]$.

Similarmente, $S : X \to \mathbb{R}$ é uma função simples (com sinal) se

$$S = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i},$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$, $E_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in [k]$.

<u>Observação 3.</u> Toda função simples é mensurável.

De fato, se $S = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$, então, dado qualquer aberto U (em $[0,\infty]$ ou $\mathbb{R}$),

$$\{S \in U\} = \bigcup \{E_i : i \in [k], c_i \in U\}$$

então $\{S \in U\} \in \mathcal{B}$.

Além disso, note que somas e produtos de funções simples são funções simples mesmo.

Mais geralmente, dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$, uma função

$$f : X \to Y$$

é chamada de mensurável se

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X \text{ para todo } E \in \mathcal{B}_Y.$$

Dada uma função $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$, o contradomínio $\mathbb{R}$ é, a priori munido com a σ-álgebra de Borel (em vez da Lebesgue). Deste jeito, a noção de mensurabilidade da função $f : X \to \mathbb{R}$ é consistente com o conceito mais geral introduzido acima.

Os seguintes resultados básicos sobre funções mensuráveis $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ são análogos aos resultados correspondentes sobre funções mensuráveis à Lebesgue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As demonstrações deles também são identicas às demonstrações no contexto euclidiano; por isso, omitiremos os detalhes técnicos das provas.

Teorema 1. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

(1) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ (ou $[0, \infty]$) é mensurável se, e somente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{f > \lambda\} \in \mathcal{B}.$$

isto também é equivalente a

$$\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$$

ou $$\{f < \lambda\} \in \mathcal{B}$$

ou $$\{f \leq \lambda\} \in \mathcal{B}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se f^+ e f^- são mensuráveis, onde

$$f^+, f^- : X \to [0, \infty),$$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{e}$$
$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

(3) Se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ são mensuráveis e $f_n \to f$ em todo ponto, então f é mensurável.

(4) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\varphi \circ f$ é mensurável.

Demonstração (1) $\{f > \lambda\} = f^{-1}(\lambda, \infty)$ e (λ, ∞) é aberto, portanto a implicação indireta segue.

Para justificar a implicação direta, note que todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos

$$U = \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n).$$

Como $\{f \in U\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \in (a_n, b_n)\}$, basta provar que

$$\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$$

para todo intervalo (a,b). Mas

$$\{f \in (a,b)\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}.$$

Além disso,

$$\{f < b\} = \{f \geq b\}^c = \left\{ \bigcap_{n \geq 1} \{f > b - \tfrac{1}{n}\} \right\}^c$$

que pertence a $\mathcal{B}$.

Logo, $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$.

(2) A equivalência é uma consequência das seguintes identidades: para todo $\lambda \geq 0$,

$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$

$$\{f^- > \lambda\} = \{-f > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$

$$\{f \quad 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}.$$

(3) Não é difícil verificar que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) > \lambda \qquad \text{sse}$$

$$\exists\, m \geq 1 \;\; \exists\, N \geq 1 \;\; \forall n \geq N \quad f_n(x) > \lambda + \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{f_n > \lambda + \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{B}.$$

(4) Se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, como φ é contínua, $\{\varphi \in U\} = \varphi^{-1}(U)$ é aberto. Portanto, $\{\varphi \circ f \in U\} = (\varphi \circ f)^{-1}(U)$

$$= f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \text{ é mensurável.}$$

$\square$

Teorema 2. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

(1) Uma função $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável se e somente se existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais e finitas, tal que

$$s_n \to f \quad \text{em todo ponto.}$$

(2) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se existe uma sequência de funções simples (com sinais) e finitas $\{s_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$s_n \to f \quad \text{em todo ponto.}$$

Demonstração As implicações indiretas são consequências do Teorema 1 (3) e da Observação 3 (que toda função simples é mensurável).

A construção de uma sequência monótona de funções simples que convergem para f é idêntica a do caso da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

De fato, dado $f : X \to [0,\infty]$ mensurável, para todo $n \geq 1$, seja

$$S_n := n \, 1_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{j}{2^n} \, 1_{\{f \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})\}}$$

Não é difícil verificar que

$$S_n \leq S_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Além disso, se $f(x) = \infty$, então para todo $n \geq 1$, $S_n(x) = n \to \infty = f(x)$, enquanto se $f(x) < \infty$, para todo $n > f(x)$ tem-se

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

logo $S_n(x) \to f(x)$.

Finalmente, dado $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável, como f^+ e f^- são funções mensuráveis sem sinais, pelo argumento acima, existem sequências de funções simples $\{S_n\}_{n\geq 1}$ e $\{T_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$s_n \to f^+$ e $\sigma_n \to f^-$ em todo ponto.

Portanto, $s_n - \sigma_n$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- = f.$$

$\square$

Teorema 3 Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. Então

$f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis.

Demonstração Pelo teorema anterior, existem duas sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tais que

$$s_n \to f \text{ e } \sigma_n \to g \text{ em todo ponto.}$$

Então $s_n + \sigma_n$ e $s_n \cdot \sigma_n$ são simples para todo $n \geq 1$ e

$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g,$$

logo $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis. $\square$