

## AULA 18: A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO MENSURÁVEL

Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em  $X$  segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja  $s: X \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i).$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se  $s$  possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

então

$$\sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j \mu(F_j),$$

A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja  $s: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função simples. Então, já que  $s$  pode ser representada como

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

onde os conjuntos mensuráveis  $\{E_i\}_{i \in [k]}$  são disjuntos, segue que

$$s^\pm = \sum_{i=1}^k c_i^\pm \mathbf{1}_{E_i} \text{ e } |s| = \sum_{i=1}^k |c_i| \mathbf{1}_{E_i}$$

Portanto,  $s^+$ ,  $s^-$ ,  $|s|$  são funções simples sem sinais.

A função  $s$  é dita absolutamente integrável se

$$\int_X s \, d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos

$$\int_X s \, d\mu := \int_X s^+ \, d\mu - \int_X s^- \, d\mu.$$

(3) Seja  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável. Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ é simples} \right\}.$$

Não é difícil ver que

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ é simples e finita} \right\},$$

e, de fato, outras restrições sobre  $s$  podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em  $\mathbb{R}^d$ ,  $s$  pode ser escolhida com suporte compacto).

- (4) Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. Então, como  $f$  é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que  $f^+$ ,  $f^-$  e  $|f|$  também são tais limites, logo são mensuráveis também.

Chamamos  $f$  de absolutamente integrável se

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty$$

Neste caso,

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

**Teorema 1.** (*propriedades básicas da integral*)

Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e  $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$  (ou  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ) duas funções mensuráveis (ou, respectivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:

- (1) (*monotonicidade e equivalência*)

Se  $f \leq g$  em  $\mu$ -q.t.p então  $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ .

Se  $f = g$  em  $\mu$ -q.t.p então  $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$ .

- (2) (*linearidade*)

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, d\mu &= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu \\ \int_X cf \, d\mu &= c \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

- (3) (*divisibilidade*)

Se  $E \in \mathcal{B}$  então  $f \mathbf{1}_E$  e  $f \mathbf{1}_{E^c}$  são mensuráveis e

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \mathbf{1}_E \, d\mu + \int_X f \mathbf{1}_{E^c} \, d\mu.$$

Denotado por

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \mathbf{1}_E$$

temos

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu.$$

- (4) (*a desigualdade de Markov*)

Se  $f: X \rightarrow [0, \infty]$ , para todo  $\lambda > 0$  tem-se

$$\mu \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda}.$$

(5)

$$\int_X |f| d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \text{ } \mu\text{-q.t.p.}$$

$$\text{Se } \int_X |f| d\mu < \infty \text{ então } |f| < \infty \text{ } \mu\text{-q.t.p.}$$

*Demonstração.* O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Desrevemos os passos principais.

- (1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição  
A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.
- (2) De novo, o primeiro passo é provar linearidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se do eorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.
- (3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto,  $f\mathbf{1}_E$  e  $f\mathbf{1}_{E^c}$  são mensuráveis.  
Como

$$f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{E^c},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

- (4) Como  $f \geq \lambda \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}}$ , a desigualdade de Markov é consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f d\mu \geq \int_X \lambda \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}} d\mu = \lambda \mu \{f \geq \lambda\},$$

Logo

$$\mu \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f d\mu}{\lambda}.$$

- (5) Claramente

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Pela desigualdade de Markov, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu \{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f| d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

Logo  $\mu \{|f| \geq \frac{1}{n}\} = 0$  para todo  $n \geq 1$ . Concluimos que  $\mu \{f \neq 0\} = 0$ , ou seja,  $f = 0$   $\mu$ -q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo  $n \geq 1$ ,

$$\mu \{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f| d\mu}{n} \rightarrow 0$$

pois  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos  $\{|f| \geq n\}_{n \geq 1}$  é não crescente, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu \{|f| = \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{|f| \geq n\} = 0.$$

□

Dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ é mensurável e } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integráveis em  $X$ .

De fato, se  $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $f + g$  é mensurável (pois  $f$  e  $g$  são mensuráveis) e como

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < \infty,$$

logo  $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

Além disso, se  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$  e  $c \in \mathbb{R}$  então  $cf$  é mensurável e

$$\int_X |cf| d\mu = |c| \int_X |f| d\mu < \infty,$$

então  $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

Definimos o espaço  $L^1$  por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) / \sim$$

onde  $f \sim g$  se  $f = g$  em q.t.p.

Como pelo Teorema 1 (5), dada uma função  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,

$$\int_X |f| d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \text{ em q.t.p.}$$

acontece que

$$\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

é uma norma em  $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

Então,  $(L^1(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_1)$  é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são  $L^1(X)$ ,  $L^1(d\mu)$ ,  $L^1(X, \mu)$  e etc.

Ademais, dado um número real  $1 \leq p < \infty$ ,

Seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

módulo igualdade q.t.p.

Munido com

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$(L^p(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_p)$  também é um espaço normado. Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções  $L^p$ .

**Teorema 2.** (a desigualdade de Chebyshev) *Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida,  $1 \leq p < \infty$  e  $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Então, para todo  $\lambda > 0$  temos*

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

*Demonstração.* Aplicamos a desigualdade de Markov à função  $|f|^p$ .

Primeiro, como  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável e  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = |x|^p$  é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \geq \lambda \Leftrightarrow |f|^p \geq \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\} \leq \frac{\int_X |f|^p d\mu}{\lambda^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

□