Aula 20 Os teoremas de convergência (revisão)

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida

TCM Se $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$

são funções mensuráveis,

então $$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} f_n \, d\mu$$

TCD Seja $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$

uma sequência de funções mensuráveis t-q.

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-qtp}$$

Suponha que $|f_n| \leq g$ em μ-qtp $\forall n \geq 1$

para alguma função $g \in L^1(X, \mu)$.

Então $f \in L^1(X,\mu)$ e $\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$

Exemplo Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) dx$$

Solução Sem pensar,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{nx}\, dx = \int_0^1 \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} n x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{nx}}_{=x}\Big) dx$$

$$= \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

$$n x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{nx} = x \cdot \frac{\operatorname{sen} 1/nx}{1/nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} x\cdot 1 = x$$

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1 \text{ quando } t\to 0$$

<u>Solução formal</u> Para todo $n \geq 1$, definimos

a função $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$n x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{nx} = x \cdot \frac{\operatorname{sen} 1/nx}{1/nx} \longrightarrow 0$$

quando $x \to 0$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right| \leq 1 \quad \forall t \neq 0$$

Logo, $|f_n(x)| \leq |x| \cdot 1 = x \quad \forall x \in (0,1]$.

Então f_n é contínua em $[0,1]$

$$\Downarrow$$

f_n é R-I integrável em $[0,1]$

$$\Downarrow$$

f_n é Lebesgue integrável em $[0,1]$ e

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx.$$

$\forall x \neq 0$

$$f_n(x) = x \cdot \frac{\operatorname{sen} 1/nx}{1/nx} \xrightarrow[n \to \infty]{} x \cdot 1 = x$$

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Claramente $f \in L^1([0,1], m)$

já que $\int_{[0,1]} f \, dm = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 x \, dx = 1/2 < \infty$$

Além disso, $|f_n(x)| \leq x = f(x)$

O TCD é aplicável e implica o seguinte:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

$(f_n \to f)$ $\blacksquare$

Modos de convergência

Dados um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, uma sequência de funções mensuráveis

$$f_n : X \to \mathbb{R}, \qquad n \geq 1$$

e uma outra função mensurável

$$f : X \to \mathbb{R},$$

$\{f_n\}_{n\geq 1}$ pode convergir para f de maneiras diferentes.

① Convergência pontual

(a) em todo ponto

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$

(b) em μ-qtp : existe $W \in \mathcal{B}$

$\mu(\mathcal{B}) = 0$

t.q. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in W^c$

② **Convergência uniforme** $f_n \to f$

(a) no espaço inteiro : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.q.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon$$

(b) convergência essencialmente uniforme

(ou com respeito à norma L^∞)

Def $f_n \to f$ essencialmente uniformemente se para todo $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para ~~q.t.p.~~ $x \in X$ $\forall n \geq N_\varepsilon$.

(c) convergência quase uniforme

<u>Def</u> $f_n \to f$ quase unif. se

$\forall \varepsilon > 0$ existe $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E^c) < \varepsilon$

t. q. $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em E.

Antes de falarmos sobre os outros tipos de convergência, vamos entender melhor a convergência essencialmente uniforme.

<u>Definição</u> Uma função mensurável $f: X \to \mathbb{R}$ é dita essencialmente limitada se existir $C < \infty$ t.q. $|f(x)| \leq C$ para μ-q.t.p. $x \in X$.

Neste caso, seja

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}(f)$$

$$:= \inf \{ C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ para } \mu\text{-q.t.p. } x \in X \}$$

<u>Obs</u> $\|f\|_\infty = \inf_{\substack{W \in \mathcal{B} \\ \mu(W) = 0}} \sup \{ |f(x)| : x \in W^c \}$

O espaço

$$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ mensurável e essencialmente limitadas} \}$$

(módulo igualdade em μ-qtp)

<u>Proposição</u> $\left(L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu), \ \|\cdot\|_\infty \right)$ é um espaço normado.

<u>Prova</u> exercício. <u>obs</u> $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-qtp !

não é trivial.

Obs

$f_n \to f$ essencialmente uniformemente sse $f_n \to f$ em $\|\cdot\|_\infty$)

ou seja,

$f_n \to f$ ess. unif. sse $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow$ " $\Updownarrow$

" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \exists \mathcal{N}_\varepsilon \ \mu(\mathcal{N}_\varepsilon) = 0$

t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon^c \ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{N}_\varepsilon^c} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Logo, $f_n \longrightarrow f$ em $\|\cdot\|_\infty$.

"$\Leftarrow$" Suponha que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

Fixe $\varepsilon > 0$. $\exists N_\varepsilon$ t.q. $\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\left(\left(\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \right.\right. \quad \left. \vphantom{\int} \right) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\inf \{ c : |f_n(x) - f(x)| \leq c$ para μ-qtp $x \in X \}$ — para μ-qtp. $x \in X$

$\Rightarrow f_n \to f$ ess. unif. $\square$

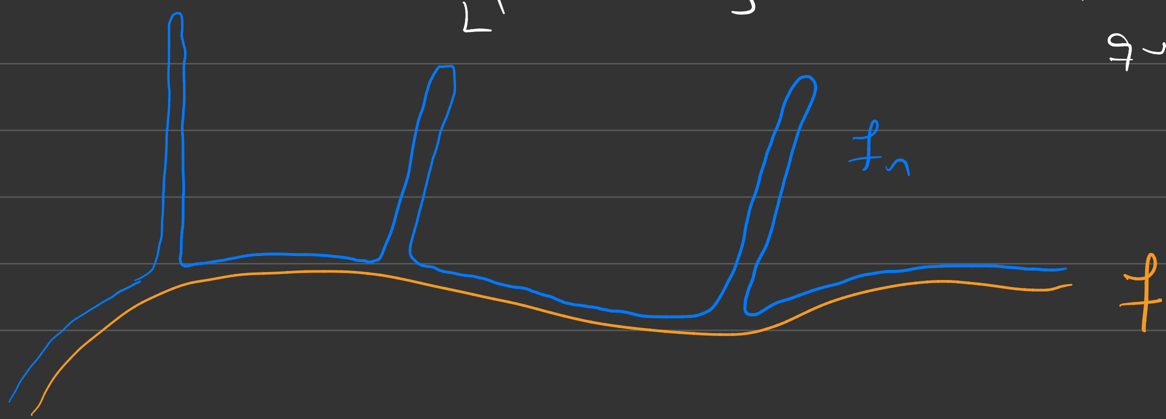
③ Convergência em média

(a) Com respeito à norma L^1

$f_n \to f$ em L^1 se

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$



(b) com respeito à norma L^p $(1 \leq p < \infty)$

$f_n \to f$ em L^p : $\|f_n - f\|_{L^p} = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$

$\longrightarrow 0$

quando $n \to \infty$.

4 Convergência em medida

$f_n \to f$ **em medida** se para todo $\delta > 0$

$$\mu \left\{ |f_n - f| \geq \delta \right\} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

onde $\left\{ |f_n - f| \geq \delta \right\} := \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \right\}$
$\in \mathcal{B}$

Teorema Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis e $f : X \to \mathbb{R}$ uma outra função mens.

(i) Se $f_n \longrightarrow f$ em L^∞ (ess. unif.)

então $f_n \longrightarrow f$ μ-qtp

(ii) Se $f_n \longrightarrow f$ em L^∞

então $f_n \longrightarrow f$ em medida

(iii) Se $f_n \to f$ em L^∞

então $f_n \to f$ quase unif.

(iv) Se $f_n \to f$ em L^p $(1 \leq p < \infty)$
(média)

então $f_n \to f$ em medida.

<u>Obs 1</u> Em geral,

$$f_n \to f \text{ em } L^\infty \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f \text{ em } L^1$$

(ou em L^p, $1 \le p < \infty$)

De fato, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente integrável

$$\left(\text{ex } f = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \ge 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \right)$$

$\forall n \ge 1$, seja $f_n := f + \frac{1}{n}$

$$|f_n - f| = \frac{1}{n} \to 0,$$

então $f_n \to f$ uniformemente

Mas

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} m(\mathbb{R})$$

$$= \infty \not\to 0.$$

<u>Obs2</u> Em geral,

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-qtp} \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f \text{ em medida.}$$

Por exemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$,

$$f_n := 1_{[n,\infty)} \longrightarrow \underbrace{0}_{f} \text{ em todo ponto.}$$

Fixe $\delta \in (0,1)$ $\{ |f_n - f| \geq \delta \}$

$$\{ |f_n - f| \geq \delta \} = \{ \; | \quad {}_{[n,\infty)} \; \geq \delta \}$$

$\delta \in (0,1)$

$$= [n, \infty)$$

$$m[n,\infty) = \infty \to \infty \neq 0.$$

Então $m\{|f_n - f| \geq \delta\} \not\to 0.$

Obs $f_n \to f$ em L^∞

$$\Updownarrow$$

existe $S \in \mathcal{B}$, $\mu(S^c) = 0$

t.q. $f_n \longrightarrow f$ unif. em S

prova: exercício.

prova do teorema

(i) e (iii) são evidentes (via a observação anterior)

(ii) $f_n \to f$ em L^∞ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ em medida.

$$\Downarrow$$

$\exists\, S \in \mathcal{B}$, $\mu(S^c) = 0$

t.q. $f_n \to f$ unif. em S.

Fixe $\delta > 0$ $\exists\, N_\delta$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ $\forall x \in S$ $\forall n \geq N_\delta$

$$\Rightarrow \{|f_n - f| \geq \delta\} \subset S^c \qquad n \geq N_\delta$$

$$\Rightarrow \quad \mu\{|f_n - f| \geq \delta\} \leq \mu(S^c) = 0$$

$$\forall n \geq N_\delta$$

$\boxed{\text{W}}$

(iv) $f_n \to f$ em L^p $(1 \leq p < \infty)$

$\Rightarrow$ $f_n \to f$ em medida.

Fixe $\delta > 0$

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} \underset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\delta^p} \to \frac{0}{\delta^p} = 0$$

quando $n \to \infty$.

$\boxtimes$