LISTA 1: A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX

Exercício 1. Prove que a medida elementar é mónotona e sub-aditiva. Em outras palavras, mostre que a função $m\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ satifaz:

(i) Dados conjuntos elementares E e F, se $E \subset F$ então $m(E) \leq m(F)$.
(ii) Para E e F conjuntos elementares tem-se $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$.

Explique o porquê de tais propriedades serem válidas para a medida de Jordan.

Exercício 2. Prove que se E e F são conjuntos Jordan mensuráveis então $E \cap F$, $E \setminus F$ e $E \triangle F$ também são Jordan mensuráveis .

Dica: Use a caracterização de mensurabilidade de Jordan em termos dos conjuntos elementares que aproximam por dentro e por fora. O problema se reduz a algumas operações (boleanas) com conjuntos.

Exercício 3. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) E é Jordan mensurável.
(ii) E é " quase elementar " no sentido de que: para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar B tal que $E \subset B$ e $m^{*,J}(B \setminus E) < \epsilon$.
(iii) Para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar A satisfazendo $m^{*,J}(E \triangle A) < \epsilon$.

Exercício 4. Mostre que uma região determinada por um triângulo é Jordan mensurável em $\mathbb{R}^2$ e prove a fórmula para calcular a área do triângulo que você aprendeu no jardim de infância.

Exercício 5. Mostre que a união enumarável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável. Então mostre que a intersecção enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável.

Dica: Busque por um exemplo de um conjunto que não seja Jordan mensurável, mas que possa ser subdivido em uma quantidade enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis. Para a segunda parte do problema, na intersec cão, considere os complementares desses subconjuntos relativos a alguma caixa suficientemente grande.

Exercício 6. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Prove o seguinte:

(a) $m^{*,J}(\overline{E}) = m^{*,J}(E)$, onde $\overline{E}$ denota o fecho de E.
(b) $m_{*,J}(\mathring{E}) = m_{*,J}(E)$, onde $\mathring{E}$ denota o interior de E.
(c) E é Jordan mensurável se, e somente se, $m^{*,J}(\partial E) = 0$, onde ∂E denota o bordo de E.

Dica: Parte (c) é um pouco complicada. A dificuldade é mostrar que se $m^{*,J}(\partial E) = 0$ então E é Jordan mensurável. Segue a dica.

Já que $m^{*,J}(\partial E) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar D com $\partial E \subset D$ e $m(D) < \epsilon$. Podemos supor que D seja um conjunto aberto (por quê?). Então temos $\overline{E} \setminus D$ *compacto* (por quê?).

Note que $\overline{E} \setminus D \subset \mathring{E}$, e por compacidade podemos encontrar um conjunto elementar B satisfazendo

$$\overline{E} \setminus D \subset B \subset \mathring{E}.$$

Isso implica $\overline{E} \subset B \cup D$. Como $B \cup D$ é um conjunto elementar, temos $m^{*,J}(\overline{E}) \leq m_{*,J}(\mathring{E}) + \epsilon$. Dado $\epsilon \to 0$, use as partes (a) e (b) para concluir que E é Jordan mensuráel.

Naturalmente, este é apenas um esquema da prova, você precisa preencher com os detalhes.

Exercício 7. Prove que se f e g são funções Darboux integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é Darboux integrável e temos

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Dica: Use a caracterização de integrabilidade de Darboux integrability em termos de "boas "funções escada (que aproximem por baixo e por cima).

Exercício 8. Obtenha uma função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que possua um conjunto de descontinuidades *não enumerável*, mas que ainda seja integrável.

Dica: Use o conjunto de Cantor.