AULA 2

MEDIDA ELEMENTAR, MEDIDA DE JORDAN

1. Medida elementar (continuação)

Lembramos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *elementar* se pode ser escrito como união finita de caixas $E = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Além disso, sempre é possível tomar caixas de forma que esta união seja disjunta. Considere o conjunto $\mathcal{E} := \left\{ E \subset \mathbb{R}^d \colon E \text{ elementar} \right\}$ e vamos definir a *medida elementar* como sendo a função $\mathrm{m} \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{m}(E) := |B_1| + \cdots + |B_n|$.

Teorema 1. *(Propriedades básicas da medida elementar) Sejam $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$ e m a medida elementar definida acima. São válidas:*

(1) (positividade) $\mathrm{m}(E) \geq 0$, para todo E e $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.
(2) (aditividade finita) Se $E \cap F = \emptyset$ então $\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.
Por indução, $\mathrm{m}(E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k) = \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_k)$.
(3) Se E é uma caixa então $\mathrm{m}(E) = |E|$.
(4) Se $E \subset F$ então $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$.
(5) (monotonicidade) Se $E \subset F$ então $\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)$.
(6) (subaditividade finita) $\mathrm{m}(E \cup F) \leq \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.
(7) (invariância à translação) $\mathrm{m}(E + a) = \mathrm{m}(E)$ para todo $a \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. $(1), (2), (3), (7)$ são evidentes e $(5), (6)$ estão na Lista 1.

Vamos provar (4): Como $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, em que E e $F \setminus E$ são conjuntos elementares. Assim, segue por (2) que

$$\mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F \setminus E)$$

Portanto, $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$ □

Teorema 2. *(Unicidade da medida elementar) Suponha que $\lambda \colon \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ seja uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $\lambda(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
(2) $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$, para todo $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
(3) $\lambda(E + a) = \lambda(E)$, para todo $a \in \mathbb{R}^d$ e $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$;
(4) $\lambda\big([0,1)^d\big) = 1$.

Então, $\lambda \equiv \mathrm{m}$.

Demonstração. (em dimensão 1)

É fácil verificar que a aditividade e a positividade da função λ implicam sua monotonicidade. De fato, se $E \subset F$ então podemos escrever $F = E \sqcup (F \setminus E)$. Assim, pela aditividade de λ segue que $\lambda(F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E)$ e como $\lambda(F \setminus E) \geq 0$ concluímos que $\lambda(E) \leq \lambda(F)$.

Passo 1. Provaremos que $\lambda([0,x]) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Temos que $\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, logo $\lambda\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \lambda\left[0, \frac{1}{2}\right)$. Como $[0,1) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, segue que

$$1 = \lambda[0,1) = \lambda\big[0, \frac{1}{2}\big) + \lambda\big[\frac{1}{2}, 1\big) = 2\lambda\big[0, \frac{1}{2}\big).$$

Portanto $\lambda\left[0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Mais geralmente, para todo $n \geq 1$ e para todo $0 \leq k < n$, $\big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big) = \big[0, \frac{1}{n}\big) + \frac{k}{n}$, então $\lambda\big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big) = \lambda\big[0, \frac{1}{n}\big)$.

Note que $[0,1) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big)$. Logo

$$1 = \lambda[0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big) = n\,\lambda\big[0, \frac{1}{n}\big),$$

mostrando que $\lambda\big[0, \frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n}$. Além disso,

$$\lambda\Big[0, \frac{k}{n}\Big) = \lambda\Big[0, \frac{1}{n}\Big) + \lambda\Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big) + \ldots + \lambda\Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big) = \frac{k}{n}.$$

Seja $x > 0$ e note que para todo $n \geq 1$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k_n}{n} \leq x < \frac{k_n+1}{n}$, então, em particular, $\frac{k_n}{n} \to x$ quando $n \to \infty$. Logo, temos que $\big[0, \frac{k_1}{n}\big) \subset [0,x) \subset \big[0, \frac{k_1+1}{n}\big)$. Pela monotonicidade da função λ,

$$\Big[0, \frac{k_n}{n}\Big) \leq \lambda[0,x) \leq \lambda\Big[0, \frac{k_n+1}{n}\Big),$$

ou seja,

$$\frac{k_n}{n} \leq \lambda\,[0,x) \leq \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Como $\frac{k_n}{n} \to x$ quando $n \to \infty$, concluímos que $\lambda\,[0,x) = x$.

Passo 2. Seja $[a,b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b$. Como $[a,b) = [0, b-a) + a$,

$$\lambda\,[a,b) = \lambda\,[0, b-a) = b - a.$$

Observe que para todo $n \geq 1$ temos $\{0\} \subset \big[0, \frac{1}{n}\big)$ e pela monotonicidade de λ segue que

$$0 \leq \lambda\{0\} \leq \lambda\Big[0, \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, $\lambda\{0\} = 0$ e como $\{x\} = \{0\} + x$ segue que $\lambda\{x\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, concluímos que para todo intervalo limitado I, $\lambda\,(I) = |I|$.

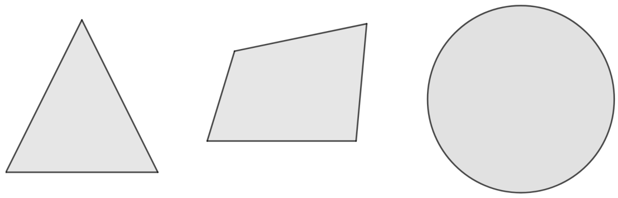
Passo 3. Seja $E \in \mathcal{E}\,(\mathbb{R})$, $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$. Como λ é aditiva concluímos que

$$\lambda\,(E) = \lambda\,(I_1) + \ldots + \lambda\,(I_n) = |I_1| + \ldots + |I_n| = \mathrm{m}\,(E)\,.$$

$\square$

2. A medida de Jordan

Os conjuntos abaixo e o conjunto de Cantor (em $\mathbb{R}$) não são elementares.



Estederemos o conceito de medida a uma família maior de conjuntos, que contém esses exemplos.

Definição 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Definimos a

- *medida interior de Jordan* de E por
$$\mathrm{m}_{*,J}(E) := \sup\{\mathrm{m}(A) \colon A \subset E, A \text{ elementar}\};$$
- *medida exterior de Jordan* de E por
$$\mathrm{m}^{*,J}(E) := \inf\{\mathrm{m}(B) \colon E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Observe que $0 \leq \mathrm{m}_{*,J}(E) \leq \mathrm{m}^{*,J}(E) < \infty$, para qualquer $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado.

Definição 2. Se $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) =: \mathrm{m}(E)$, então dizemos que E é um conjunto *Jordan mensurável.* Neste caso, $\mathrm{m}(E)$ é a *medida de Jordan* de E.

Observação 1. (1) Se E é um conjunto elementar, então E é Jordan mensurável.
(2) Se $\mathrm{m}^{*,J}(E) = 0$ então E é Jordan mensurável e $\mathrm{m}(E) = 0$.

Teorema 3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) E é Jordan mensurável;
(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existem conjuntos elementares A e B tais que
$$A \subset E \subset B \text{ e } \mathrm{m}(B \setminus A) < \epsilon;$$
(iii) Para todo $\epsilon > 0$, existe A conjunto elementar tal que $\mathrm{m}^{*,J}(A \Delta E) < \epsilon$.

Demonstração. A equivalência $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ está na Lista 1.

Vamos mostrar $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Inicialmente suponha que E é Jordan mensurável, logo pela definição $\mathrm{m}_{*,J}(E)\, \mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}(E)$. Fixe $\epsilon > 0$ e veja que
$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \inf\{\mathrm{m}(B) \colon B \supset E \text{ elementar}\}.$$
Portanto, existe $B \supset E$ conjunto elementar de modo que
$$\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(E) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1}$$
Além disso, temos também pela definição que
$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(E) = \sup\{\mathrm{m}(A) \colon A \subset E \text{ elementar}\}.$$
Ou seja, existe $A \subset E$ conjunto elementar de modo que
$$\mathrm{m}(A) > \mathrm{m}(E) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Desta forma, temos que $A \subset E \subset B$ em que A e B são conjuntos elementares e por (1) e (2) segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,(B \setminus A) &= \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) \\ &\leq \mathrm{m}(E) + \frac{\epsilon}{2} - \mathrm{m}(E) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixe $\epsilon > 0$ e suponha que existam A e B conjuntos elementares de modo que $A \subset E \subset B$ e $\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B \setminus A) < \epsilon$. Então, pelas definições das medidas exterior e interior de Jordan,

$$0 \leq \mathrm{m}^{*,J}\,(E) - \mathrm{m}_{*,J}\,(E) \leq \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) < \epsilon.$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\mathrm{m}^{*,J}\,(E) - \mathrm{m}_{*,J}\,(E) = 0$, ou seja, E é Jordan mensurável. □

Um truque comum em Análise.

- Para provar que $a = 0$ (onde $a \geq 0$) é suficiente mostrar que
$$a < \epsilon, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$
- Para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $|y - x| = 0$, ou seja,
$$|y - x| < \epsilon, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$
- Alternativamente, para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $x \leq y$ e $y \leq x$, ou seja, que
$$x < y + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{e} \quad y < x + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Exercício 1. Prove que a região delimitada por um triângulo é Jordan mensurável e também prove a fórmula da área (ou seja, a medida de Jordan) de um triângulo.