AULA 4: A INTEGRAL DE DARBOUX

Definição 1. Uma função $s : [0, b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada se existe uma partição

$$[0, b] = I_1 \sqcup ... \sqcup I_n$$

e constantes $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$s(x) = c_j, \quad \text{se} \quad x \in I_j, 1 \leq j \leq n$$

Definição 2. Função indicadora $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } \ x \in E \ , \\ 0 & \text{if } \ x \notin E \ . \end{cases}$$

Então uma função $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada se e somente se:

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}$$

onde $\{I_1, ..., I_n\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Algumas propriedades da função indicadora:

(1) $\mathbf{1}_{E \cap F} = \mathbf{1}_E \cdot \mathbf{1}_F$
(2) Se $E \cap F = \emptyset$ então $\mathbf{1}_{E \sqcup F} = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F$
(3) $E \subset F$ se e somente se $\mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_F$

Definição 3. Seja $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}$ uma função escada. A integral de Darboux de s é definida por:

$$\int_a^b s(x)dx := \sum_{j=1}^{n} c_j |I_j|$$

Observação 1. Este conceito é bem definido, não depende da representação de s como combinação linear de funções indicadora, ou seja: se $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{l=1}^{m} d_l J_l$ então $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k |I_k| = \sum_{l=1}^{m} d_l |J_l|$. De fato, considerando:

$$\{I_k \cap J_l : 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m, I_k \cap J_l \neq \emptyset\}$$

é uma partição mais fina de $[a, b]$. Como $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{l=1}^{m} d_l J_l$ se $x \in I_k \cap J_l$ então $s(x) = c_k$ e $s(x) = d_l$ assim $c_k = d_l$.

Portanto,

$$s = \sum_{k,l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} c_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}$$

Onde,

$$I_k = \sqcup (I_k \cap J_l) \quad , l : I_k \cap J_l \neq \emptyset \quad \text{e} \quad J_l = \sqcup (I_k \cap J_l) \quad , k : I_k \cap J_l \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow |I_k| = \sum_l |I_k \cap J_l| \quad \text{e} \quad |J_l| = \sum_k |I_k \cap J_l|$$

Logo,

$$\sum_k c_k |I_k| = \sum_k c_k \sum_l |I_k \cap J_l| = \sum_{k,l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} c_k |I_k \cap J_l|$$

e

$$\sum_l d_l |J_l| = \sum_l d_l \sum_k |I_k \cap J_l| = \sum_{k,l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} d_l |I_k \cap J_l|$$

Mas, $c_k = d_l$ quando $I_k \cap J_l \neq \emptyset$, então $\sum_k c_k |I_k| = \sum_l d_l |J_l|$.

Proposição 1. *(Propriedades básicas da Integral de Darboux para funções escada) Sejam $s, \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções escadas duas funções escada. Então*
(i) Linearidade: $s + \sigma$ é uma função escada e

$$\int_a^b (s + \sigma) = \int_a^b s + \int_a^b \sigma$$

Se $c \in \mathbb{R}$ então cs é uma função escada e

$$\int_a^b cs = c \int_a^b s$$

(ii) Positividade: se $s \leq 0$ então

$$\int_a^b s \leq 0$$

(iii) Monotonicidade: $s \leq \sigma \Rightarrow \int_a^b s \leq \int_a^b \sigma$
(iv) Se E é um conjunto elementar, então

$$\int_a^b \boldsymbol{1}_E = m(E)$$

Demonstração. (i) Aditividade: Sejam

$$s = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{I_k}$$

e

$$\sigma = \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{1}_{J_l}$$

onde,

$$I_k = \sqcup_l I_k \cap J_l \Rightarrow \mathbf{1}_{I_k} = \sum_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}$$

Sempre podemos usar a mesma partição para duas funções escada:

$$s = \sum_k c_k \mathbf{1}_{I_k} = \sum_{k,l} c_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}$$

$$\sigma = \sum_l d_l \mathbf{1}_{J_l} = \sum_{k,l} d_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}$$

Então, podemos representar $\{k_1, .., k_p\}$ partição de $[a, b]$:

$$s = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{1}_{K_i} \sigma \quad = \sum_{i=1}^{p} b_i \mathbf{1}_{K_i} \Rightarrow s + \sigma = \sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i) \mathbf{1}_{k_i} \Rightarrow s + \sigma \text{ é uma função escada}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (s + \sigma) &= \sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)|K_i| \\ &= \sum a_i |k_i| + \sum b_i |k_i| = \int_a^b s + \int_a^b \sigma \end{aligned}$$

□

(ii) Evidente (Exercício)

(iii) Exercício

Demonstração. (iv) Seja $E = I_1 \sqcup ... \sqcup I_n \subset [a, b]$ um conjunto elementar.

$$[a, b] \setminus E = J_1 \sqcup ... \sqcup J_n$$

também é elementar.Assim, $\{I_1, ..., I_n, J_1, ..., J_m\}$ é uma partição de $[a, b]$ e

$$\mathbf{1}_E = 1 \cdot \mathbf{1}_{I_1} + ... + 1 \cdot \mathbf{1}_{I_n} + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_1} + ... + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_m}$$

Então $\mathbf{1}_E$ é uma função escada e

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{1}_E &= 1 \cdot \mathbf{1}_{I_1} + ... + 1 \cdot \mathbf{1}_{I_n} + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_1} + ... + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_m} \\ &= |I_1| + ... + |I_n| \\ &= m(E) \end{aligned}$$

□

Definição 4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ um função limitada. Considere todas as funções escadas $s \le f$ e $\sigma \ge f$. Definimos:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx := \sup\{\int_a^b s(x)dx : s \le f \text{ função escada}\}$$

a integral de Darboux inferior de f e

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx := \sup\{\int_a^b s(x)dx : s \le f \text{ função escada}\}$$

a integral de Darboux superior de f.
Claramente, $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \le \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$.

f é chamada de Darboux integrável se:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

Neste caso, o valor comum se chama a **Integral de Darboux de** f.

Proposição 2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. f é Darboux integrável se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem $s \leq f \leq \sigma$, s, σ funções escada tais que:*

$$\int_a^b (\sigma - s) \leq \varepsilon$$

Demonstração. Exercício. □

Proposição 3 (As propriedades básicas da integral de Darboux)**.**
(i) Linearidade: Se f_1, f_2 são integrais à Darboux e $c \in \mathbb{R}$ então $f_1 + f_2$ e cf_1 também são e:

$$\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

e

$$\int_a^b cf_1 = c\int_a^b f_1$$

(ii) Positividade: $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
(iii) Monotonicidade: $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
(iv) Seja $E \subset [a,b]$. E é Jordan mensurável se e somente se $\boldsymbol{1}_E$ é Darboux integrável. Neste caso, $\int_a^b \boldsymbol{1}_E = m(E)$

Demonstração. A segunda parte do item (i) e os itens (ii) e (iii) serão deixados como exercícios. *Aditividade*: f_1, f_2 são Darboux integráveis. Fixe $\varepsilon > 0$, existem s_i, σ_i, $i = 1, 2$ funções escada tais que: $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$ e $\int \sigma_1 - \int s_i < \varepsilon$. Então,

$$s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2$$

$s_1 + s_2, \sigma_1 + \sigma_2$ são funções escada. Além disso,

$$\int [(\sigma_1 + \sigma_2) - (s_1 + s_2)] = \int (\sigma_1 - s_1) + \int (\sigma_2 - s_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Então, pela proposição anterior, $f_1 + f_2$ é integral à Darboux. Ademais, como $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$, $i = 1, 2$. Segue que

$$\int s_i \leq \int f_i \leq \int \sigma_i$$

(pela definição da integral de Darboux). Então,

$$\int s_1 + \int s_2 \leq \int f_1 + \int f_2 \leq \int \sigma_1 + \int \sigma_2 \tag{1}$$

já que $s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2$ são funções escada. Como $s_i \leq f_i \leq \sigma_1, i = 1, 2$ segue que $s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2$, então:

$$\int (s_1 + s_2) \leq \int (f_1 + f_2) \leq \int (\sigma_1 + \sigma_2) \tag{2}$$

Assim, (1)+(2) implicam que:

$$\left| \int f_1 + \int f_2 - \int (f_1 + f_2) \right| \leq \left| \int (\sigma_1 + \sigma_2) - \int (s_1 + s_2) \right| \leq 2\varepsilon$$

(iv) E é Jordan mensurável se e somente se $\mathbf{1}_E$ é Darboux integrável.
Neste caso, $\int \mathbf{1}_E = m(E)$.

$(\Rightarrow)$: Fixe $\varepsilon > 0$. Como E é Jordan mensurável, existem $A \subset E \subset B, A, B$ elementares tais que: $m(B) - m(A) < \varepsilon$ e $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_B$ onde A, B elementares implicam que $\mathbf{1}_A$ e $\mathbf{1}_B$ são funções escada e

$$\int \mathbf{1}_B - \int \mathbf{1}_A = m(B) - m(A) < \varepsilon$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_E &\leq \mathbf{1}_B \\ \Rightarrow \int \mathbf{1}_A &\leq \int \mathbf{1}_E \leq \int \mathbf{1}_B \\ \Rightarrow \mathrm{m}(A) &\leq m(E) \leq m(B) \\ \Rightarrow \left| \int \mathbf{1}_E - m(E) \right| &\leq m(B) - m(A) < \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: Suponha que $\mathbf{1}_E$ seja integrável à Darboux. Vamos provar que E é Jordan mensurável. Para isso, fixe $\varepsilon > 0$. Existe $s \leq \mathbf{1}_E \leq \sigma$ funções escada, tais que $\int \sigma - \int s < \varepsilon$ onde $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{I_k}$ e $\sigma = \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{1}_{I_k}$. Definimos $W_1 = k : c_k > 0$. Se

$$k \in W_1 \text{ então } I_k \subset E \tag{3}$$

De fato, dado $x \in I_k$,

$$0 < c_k = s(x) \leq \mathbf{1}_E(x) \Rightarrow \mathbf{1}_E(x) = 1 \Rightarrow x \in E$$

Logo,

$$I_k \subset E \text{ e } c_k \leq 1 \tag{4}$$

Seja $A = \sqcup_{k \in W_1} I_k$ conjunto elementar então, por (3), $A \subset E$. Assim,

$$\begin{aligned} m(A) = \sum_{k \in W_1} |I_k| &= \sum_{k \in W_1} \mathbf{1} \cdot |I_k| \\ &\geq \sum_{k \in W_1} c_k |I_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} c_k |I_k| = \int s \end{aligned}$$

(se $k \notin W_1$, então $c_k \leq 0$). Então, $A \subset E, A$ elementar $m(A) \geq \int s$

Agora consideremos $\sigma = \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{1}_{I_k}, \sigma \geq \mathbf{1}_E \geq 0$.
Sejam $W_2 := k : I_k \cap E \neq \emptyset$ e $B = \bigcup_{k \in W_2} I_k$ elementar, logo $E \subset B$.
Se $k \in W_2 \Leftrightarrow E \cap I_k \neq \emptyset$ então existe $x \in E \cap I_k$ daí

$$\mathbf{1}_E(x) \leq \sigma(x)$$

então $d_k \geq 1$. Considerando $B = \sqcup_{k\in W_2} I_k$, temos:

$$\begin{aligned} m(B) = \sum_{k\in W_2} |I_k| &= \sum_{k\in W_2} \mathbf{1}|I_k| \\ &\leq \sum_{k\in W_2} d_k|I_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} d_k|I_k| = \int \sigma \end{aligned}$$

Logo,

$$E \subset B, \text{ onde } B \text{ elementar, } m(B) \leq \int \sigma$$

e

$$A \subset E, \text{ onde } A \text{ elementar, } m(A) \geq \int s$$

Asssim, $A \subset E \subset B$, A, B conjuntos elementares

$$m(B) - m(A) \leq \int \sigma - \int s < \varepsilon$$

Portanto, E é Jordan mensurável. $\square$