AULA 8: CONJUNTOS MENSURÁVEIS À LEBESGUE

Regularidade exterior. Lembre-se que a medida exterior de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dada por

$$\mathrm{m}^\star(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } B_n \text{ são caixas} \right\} .$$

O seguinte resultado se refere à aproximação por cima da medida exterior de um conjunto qualquer por conjuntos abertos.

Proposição 1. *(regularidade exterior) Dado $E \subset \mathbb{R}^d$, temos*

$$\mathrm{m}^\star(E) = \inf \left\{ \mathrm{m}^\star(U) \colon U \textit{ aberto}, \ U \supset E \right\} .$$

Demonstração. Como a medida exterior é monótona, temos que $\mathrm{m}^\star(E) \le \mathrm{m}^\star(U)$ para todo conjunto aberto $U \supset E$. Assim, $\mathrm{m}^\star(E) \le \inf \left\{ \mathrm{m}^\star(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \right\}$.

Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de medida exterior, existem caixas $\{B_n\}_{n\ge1}$ tais que

$$E \subset \bigcup_{n\ge1} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le \mathrm{m}^\star(E) + \epsilon \, .$$

Pague mais um ϵ para supor que as caixas $\{B_n\}_{n\ge1}$ são abertas. Então, o conjunto

$$U := \bigcup_{n\ge1} B_n$$

é aberto, $E \subset U$ e, pela definição de medida exterior aplicada a U,

$$\mathrm{m}^\star(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le \mathrm{m}^\star(E) + \epsilon \, .$$

Tomado $\epsilon \to 0$, concluímos que $\inf \left\{ \mathrm{m}^\star(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \right\} \le \mathrm{m}^\star(E)$. □

Espaço de conjuntos mensuráveis. Os próximos resultados técnicos serão usados para estabelecer a existência de uma grande classe de conjuntos mensuráveis.

Caixas quase disjuntas. Enquanto os intervalos $(0, 1]$ e $[1, 2]$ da reta $\mathbb{R}$ não são disjuntos, a interseção deles, o conjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é trivial do ponto de vista da teoria da medida. Similarmente, caixas em $\mathbb{R}^2$ que se intersectam somente ao longo do um lado, enquanto não são tecnicamente disjuntas, para todos os fins práticos, se comportam como se fossem disjuntas. Vamos formalizar esta ideia na seguinte definição.

Definição 1. Duas caixas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$ são ditas *quase disjuntas* se seus interiores são disjuntos.

Lema 1. *Se $B_1, \dots, B_N$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \right) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| \ .$$

Demonstração. Tem-se

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{int}(B_n) \cup \mathcal{Z},$$

onde $\mathcal{Z} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \partial B_n$, então $\mathcal{Z}$ é negligenciável. Portanto

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |\operatorname{int}(B_n)| + \mathrm{m}(\mathcal{Z}) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| .$$

□

Lema 2. *Se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $\{B_n\}_{n\geq 1}$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$\mathrm{m}^\star(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \,. \tag{1}$$

Em particular, se

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \,,$$

onde as caixas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ e $\{B'_n\}_{n\geq 1}$ são, respectivamente, quase disjuntas duas à duas, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |B'_n| \,.$$

Demonstração. Pela definição da medida exterior,

$$\mathrm{m}^\star(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \,.$$

Vamos provar a desigualdade oposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |B_n| \,.$$

Seja $N \geq 1$ e considere a união finita $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \subset E$. Então, pelo lema anterior,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \mathrm{m}^\star\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq \mathrm{m}^\star(E) \,.$$

Portanto, para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| \leq \mathrm{m}^\star(E) \,,$$

e tomando $N \to \infty$, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq \mathrm{m}^\star(E) \,,$$

assim finalizando a prova do lema. □

Exemplo 1. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$, temos (o fato já estabelecido por outro meio) que

$$\mathrm{m}^\star(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty.$$

Lema 3. *Todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n\geq 1}$.*

Demonstração. A ideia é usar a malha diádica do espaço euclidiano. Vamos considerar o caso unidimensional $d = 1$. O caso multidimensional pode ser tratado analogamente.

Defina os intervalos diádicos

$$Q_{i,n} := \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \quad n \geq 0, \, i \in \mathbb{Z}\,,$$

onde o índice n será referido como "a geração"a qual $Q_{i,n}$ pertence.

Note que $|Q_{i,n}| = \frac{1}{2^n}$. Então, dado $n \geq 0$, a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$$

de intervalos diádicos de geração n representa a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^n}$.[1]

Note também que a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}, \, n \geq 1\}$$

de todos os intervalos diádicos, de quaisquer geração, é enumerável.

As seguintes propriedades dos intervalos diádicos serão usadas na prova do lema, e são fáceis de verificar.

(1) Dado $n \geq 0$, os intervalos diádicos $\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ de geração n são quase disjuntos, fechados e cobrem o espaço $\mathbb{R}$.

(2) Cada intervalo diádico de geração $n \geq 1$ está contido em um intervalo "pai"de geração $n - 1$.

(3) Se Q, Q' são quaisquer intervalos diádicos, de quaisquer gerações, então, ou eles são quase disjuntos, ou um deles contém o outro (isto é, um é o "antepassado"do outro).

Afirmamos que dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, tem-se

$$U = \bigcup \{Q \colon Q \text{ intervalo diádico}, Q \subset U\}\,. \tag{2}$$

De fato, evidentemente, a união no lado direito está contida em U, então basta provar a inclusão oposta.

Seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $(x-r, x+r) \subset U$. Já que $\frac{1}{2^n} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que existe N tal que $\frac{1}{2^N} < r$. Usaremos a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^N}$, isto é, pensaremos em $\{Q_{i,N} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ como uma régua com unidade de medida $\frac{1}{2^N}$.

Mais precisamente, os intervalos diádicos de geração N cobrem o espaço $\mathbb{R}$ inteiro, então existe Q, um intervalo diádico de geração N tal que $x \in Q$. Mas como $|Q| = \frac{1}{2^N} < r$, segue que $Q \subset (x-r, x+r)$. Então, $x \in Q \subset (x-r, x+r) \subset U$, estabelecendo assim (2).

A representação do conjunto U dada por (2) ainda não é o que precisamos, pois os intervalos incluídos não são quase disjuntos: com cada intervalo diádico $Q \subset U$, incluímos também todos os seus descendentes. A solução é, então, considerar apenas os intervalos diádicos maximais que estão contidos em U.

De fato, chamamos um intervalo diádico $Q^\star$ *maximal* em relação à inclusão se, sempre que $Q^\star \subset Q \subset U$, onde Q é diádico, temos $Q^\star = Q$.

Pelo Lema de Zorn, para todo intervalo diádico $Q \subset U$, existe um intervalo diádico maximal $Q^\star \subset U$ tal que $Q \subset Q^\star$. Note também que se $Q_1^\star$, $Q_2^\star \subset U$ são intervalos diádicos maximais, então, ou eles são quase disjuntos, ou são iguais.

[1]Em dimensão maior, a malha considerada consiste em produtos cartesianos de intervalos diádicos.

Concluímos o seguinte

$$U = \bigcup \{Q^\star : Q^\star \text{ intervalo diádico maximal} \subset U\}\ ,$$

que, de fato, é uma união enumerável de intervalos fechados e quase disjuntos. □

O seguinte exercício é uma amostra relativamente simples de uma propriedade bem mais geral e forte da medida (exterior) de Lebesgue. O resultado enunciado neste exercício será utilizado em breve como uma ferramenta técnica.

Exercício 1. Sejam $K, L \subset \mathbb{R}^d$ dois conjuntos compactos e disjuntos. Então,

$$\mathrm{m}^\star(K \cup L) = \mathrm{m}^\star(K) + \mathrm{m}^\star(L)\,.$$

O próximo teorema estabelece a existência de uma coleção bem ampla e topologicamente rica de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

Teorema 2. *(existência de conjuntos mensuráveis)*

(i) Cada conjunto aberto é mensurável à Lebesgue.
(ii) Cada conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

(iii) Cada conjunto negligenciável é mensurável à Lebesgue.

(iv) O conjunto vazio $\emptyset$ é mensurável à Lebesgue.
(v) Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^{\complement} = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.
(vi) Se $\{E_n\}_{n\ge1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcup_{n\ge1} E_n$ também é mensurável.

(vii) Se $\{E_n\}_{n\ge1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcap_{n\ge1} E_n$ também é mensurável.

Demonstração. Itens (i) é (iv) são óbvios, item (iii) já foi provado, e item (vii) é uma consequência dos itens (v) e (vi) e das leis de Morgan. Portanto, resta provar itens (ii), (v) e (vi). Seguiremos a ordem (vi), depois (ii) e finalmente (v).[2]

$\boxed{\text{(vi)}}$ Considere uma família $\{E_n\}_{n\ge1}$ de conjuntos mensuráveis e seja $\epsilon > 0$. Usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$. Para cada $n \ge 1$, existe um conjunto aberto $U_n \supset E_n$ tal que

$$\mathrm{m}^\star(U_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Defina

$$U := \bigcup_{n\ge1} U_n\,.$$

Então, U é aberto, $U \supset \bigcup_{n\ge1} E_n$ e, como

$$U \setminus \left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) = \left(\bigcup_{n\ge1} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) \subset \bigcup_{n\ge1} (U_n \setminus E_n)\ ,$$

usando a subaditividade da medida exterior, tem-se

$$\mathrm{m}^\star\left(U \setminus \left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right)\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mathrm{m}^\star(U_n \setminus E_n) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon\,,$$

mostrando que $\bigcup_{n\ge1} E_n$ é quase aberto, ou seja, mensurável.

[2] Item (ii) teria sido uma consequência dos itens (i) e (v), se conseguíssemos provar (v) diretamente.

$\boxed{\text{ii}}$ Todo conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.
Seja $F \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado. Para cada $n \geq 1$, seja

$$F_n := F \cap [-n, n]^d \,.$$

Note que os conjuntos F_n, $n \geq 1$ são compactos e $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Portanto, basta provar que todo conjunto compacto K é mensurável.

Seja $\epsilon > 0$. Pela regularidade exterior da medida externa, existe U aberto tal que $U \supset K$ e

$$\mathrm{m}^\star(U) \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon \,.$$

O objetivo é provar que $\mathrm{m}^\star(U \setminus K) \leq \epsilon$, o que vai finalizar a prova.[3]

Como $U \setminus K = U \cap K^\complement$ é aberto, pelo Lema 3 da aula passada, $U \setminus K$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas fechadas (então compactas) e quase disjuntas: $U \setminus K = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$.

Pelo Lema 2 da aula passada,

$$\mathrm{m}^\star(U \setminus K) = \sum_{n=1}^\infty |Q_n| \,.$$

Portanto, basta provar que para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N |Q_n| \leq \epsilon \,. \tag{3}$$

Fixe $N \geq 1$ e considere a união finita de caixas

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_N =: L \,.$$

Então, L é compacto, $L \subset U \setminus K$ e assim,

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{e} \quad K \cup L \subset U \,.$$

Pelo Exercício 1 e pelo Lema 1 da aula passada,

$$\mathrm{m}^\star(K \cup L) = \mathrm{m}^\star(K) + \mathrm{m}^\star(L) = \mathrm{m}^\star(K) + \sum_{n=1}^N |Q_n| \,. \tag{4}$$

Além disso,

$$\mathrm{m}^\star(K \cup L) \leq \mathrm{m}^\star(U) \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon \,. \tag{5}$$

Combinando (4) e (5) segue que

$$\mathrm{m}^\star(K) + \sum_{n=1}^N |Q_n| \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon \,,$$

que implica (3) e finaliza a prova.

[3] Enquanto a posteriori isso se tornará verdade, por enquanto, não sabemos que $\mathrm{m}^\star(U \setminus K) = \mathrm{m}^\star(U) - \mathrm{m}^\star(K)$.

$\boxed{\text{vi}}$ Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^\complement = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.

A ideia da prova é "quase preencher"o conjunto complementar $E^\complement$ por conjuntos fechados. Como E é Lebesgue mensurável, para todo $n \geq 1$ existe um conjunto aberto U_n tal que

$$E \subset U_n \quad \text{e} \quad \mathrm{m}^\star(U_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}\,.$$

Temos, claramente, que para todo $n \geq 1$, o conjunto $F_n := U_n^\complement \subset E^\complement$ e F_n é fechado (portanto, mensurável). Seja

$$F := \bigcup_{n\geq 1} F_n\,.$$

Então, F é mensurável e $F \subset E^\complement$. Vamos provar que $E^\complement \setminus F$ é negligenciável.

Como, para todo $n \geq 1$, $F_n \subset F$, temos

$$E^\complement \setminus F \subset E^\complement \setminus F_n = E^\complement \setminus U_n^\complement = U_n \setminus E\,,$$

segue que

$$0 \leq \mathrm{m}^\star\left(E^\complement \setminus F\right) \leq \mathrm{m}^\star\left(U_n \setminus E\right) \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Portanto, $\mathrm{m}^\star\left(E^\complement \setminus F\right) = 0$, e em particular, $E^\complement \setminus F$ é mensurável. Mas

$$E^\complement = F \cup \left(E^\complement \setminus F\right)\,,$$

monstrando a mensurabilidade de $E^\complement$. □

Critérios para mensurabilidade. Seja $2^{\mathbb{R}^d} := \left\{A\colon A \subset \mathbb{R}^d\right\}$ a família dos todos os subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^d$. Note que as seguintes propriedades valem para conjuntos $A, B, C \in 2^{\mathbb{R}^d}$:

$A \triangle A = \emptyset$.
$A \triangle B = B \triangle A$.
$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

Portanto, a diferença simétrica $\triangle$ parece uma "distância"em $2^{\mathbb{R}^d}$.

Exercício 2. Prove que

$$d(A,B) := \mathrm{m}^\star(A \triangle B)$$

é uma pseudo[4] métrica em $2^{\mathbb{R}^d}$.

Teorema 3. *(critérios para mensurabilidade) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é Lebesgue mensurável, ou seja, E é quase aberto por fora*: $\forall \epsilon > 0$ existe $U \supset E$ aberto tal que* $\mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon$.

(ii) E está perto de um aberto*: $\forall \epsilon > 0$ existe U aberto tal que* $\mathrm{m}^\star(U \triangle E) < \epsilon$.

(iii) E é quase fechado por dentro*: $\forall \epsilon > 0$, existe $F \subset E$ fechado tal que* $\mathrm{m}^\star(E \setminus F) < \epsilon$.

(iv) E está perto de um fechado*: $\forall \epsilon > 0$ existe F fechado tal que* $\mathrm{m}^\star(F \triangle E) < \epsilon$.

(v) E está perto de um mensurável*: $\forall \epsilon > 0$ existe A mensurável tal que* $\mathrm{m}^\star(A \triangle E) < \epsilon$.

[4]No sentido que $d(A,B) = 0$ não necessariamente implica $A = B$.

Demonstração. A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é evidente, já que se $U \subset E$, então $U \triangle E = U \setminus E$. A implicação oposta é exercício. Idem a equivalência (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv), enquanto (iv) $\Longrightarrow$ (v) também é evidente. Então, resta provar as implicações (i) $\Longrightarrow$ (iii) e (v) $\Longrightarrow$ (ii).

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(iii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Como E é mensurável, $E^{\complement}$ também é mensurável, então existe um conjunto aberto $U \supset E^{\complement}$ tal que $\mathrm{m}^\star(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon$.

Seja $F := U^{\complement}$. Então, F é fechado e $F \subset \left(E^{\complement}\right)^{\complement} = E$. Por outro lado,

$$E \setminus F = \left(E^{\complement}\right)^{\complement} \setminus U^{\complement} = U \setminus E^{\complement},$$

então

$$\mathrm{m}^\star(E \setminus F) = \mathrm{m}^\star(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon\,,$$

mostrando que E é quase fechado por dentro.

$\boxed{\text{(v)} \implies \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe A mensurável tal que $\mathrm{m}^\star(A \triangle E) < \epsilon$. Como A é quase aberto, pelo item (ii) A está perto de um aberto: existe U aberto tal que $\mathrm{m}^\star(U \triangle A) < \epsilon$.

Portanto, pela desigualdade triangular na pseudo métrica $(A, B) \mapsto \mathrm{m}^\star(A \triangle B)$, temos que

$$\mathrm{m}^\star(U \triangle E) \le \mathrm{m}^\star(U \triangle A) + \mathrm{m}^\star(A \triangle E) < 2\epsilon\,,$$

monstrando que E está perto de um aberto. $\square$

Comentário 1. Denotamos por

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \left\{E \subset \mathbb{R}^d \colon E \;\text{ é Lebesgue mensurável}\right\}$$

a família de conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Provamos que

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(ii) Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ então $E^{\complement} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(iii) Se $\{E_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, então $\bigcup_{n\ge1} E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Assim, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ é uma *σ-álgebra.*

Este conceito será abstratído na segunda parte do curso: diz-se que uma família de subconjuntos de um espaço qualquer é uma σ-álgebra se contiver o conjunto vazio e se for fechada sob a operação complemento e sob uniões enumeráveis.
Consequentemente, uma σ-álgebra também é fechada sob interseções enumeráveis.

Ademais, provamos que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ contém todos os conjuntos abertos e fechados.

Os axiomas da medida. A restrição da medida exterior de Lebesgue à família $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou seja, a função $\mathrm{m} \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$,

$$\mathrm{m}(E) := \mathrm{m}^\star(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\; B_n \text{ são caixas}\right\}$$

é chamada de *medida de Lebesgue* no espaço $\mathbb{R}^d$.

Outras notações comuns da medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$ são $\lambda(E)$, $|E|$, $\mathrm{Leb}(E)$ e etc.

O teorema seguinte mostra as propriedades básicas da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, o que no contexto abstrato de uma σ-álgebra qualquer irão representar a definição de uma medida.

Teorema 4. *(os "axiomas"da medida)*

(1) $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$

(2) (σ-aditividade) Se $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *são disjuntos, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Antes de começar a prova deste teorema, vamos notar os seguintes fatos.

1. (monotonicidade) Se E, F são mensuráveis e $E \subset F$, então

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)\,.$$

Isso é evidente, já que a função m coincide com a medida exterior $\mathrm{m}^\star$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, e a medida exterior é monótona.

2. (aditividade finita para compactos) Se K, L são conjuntos compactos (assim, mensuráveis) e disjuntos, então

$$\mathrm{m}(K \cup L) = \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L)\,.$$

De novo, esta propriedade (aditividade para dois compactos) vale para a medida exterior $\mathrm{m}^\star$ que é igual a medida m em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.
Ademais, por indução, se $K_1, \ldots, K_N$ são compactos disjuntos, então

$$\mathrm{m}\left(K_1 \cup \ldots \cup K_N\right) = \mathrm{m}(K_1) + \ldots + \mathrm{m}(K_n)\,.$$

Demonstração do Teorema 4. Já sabemos que

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathrm{m}^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(E_n) \quad \text{(pela sub aditividade da medida exterior)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Então, basta mostrar a desigualdade oposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,. \tag{6}$$

Caso 1: Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *compactos*. Neste caso, para todo $N \geq 1$, usando a aditividade finita para compactos, e depois a monotonicidade, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}(E_n) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,.$$

Tomando $N \to \infty$, obtemos (6).

Caso 2: Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *limitados* (mas não necessariamente compactos). Seja $\epsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$, E_n é mensurável, então quase fechado por dentro; portanto, existe $F_n \subset E_n$ fechado (logo limitado, e assim, compacto) tal que

$$\mathrm{m}^\star(E_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Pela sub aditividade da medida exterior, temos

$$\mathrm{m}^\star(E_n) = \mathrm{m}^\star\left(F_n \cup (E_n \setminus F_n)\right) \leq \mathrm{m}^\star(F_n) + \mathrm{m}^\star(E_n \setminus F_n) < \mathrm{m}^\star(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Somado sobre todo $n \geq 1$ segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(F_n) + \epsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) + \epsilon = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \epsilon \quad \text{(pelo Caso 1, pois } F_n \text{ são compactos)} \\
&\leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \epsilon \quad \text{(pela monotonicidade da medida).}
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$ mostramos (6) neste caso.

Caso 3: O caso geral. Todo conjunto do espaço euclidiano pode ser escrito como uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados (por quê?).

Então escreva, para todo $n \geq 1$, $E_n = \bigcup_{m \geq 1} E_{n,m}$, onde $\{E_{n,m} \colon m \geq 1\}$ são conjuntos limitados e disjuntos entre si.

Portanto,

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m},$$

que é uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados.

Pelo Caso 2, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mathrm{m}\left(\bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m}\right) \\
&= \sum_{n,m \geq 1} \mathrm{m}(E_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_{n,m})\right) \quad \text{(pelo teorema de Fubini-Tonelli)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \quad \text{(de novo, pelo Caso 2),}
\end{aligned}$$

assim finalizando a prova. $\square$