AULA 10: CONJUNTOS PATOLÓGICOS E NÃO PATOLÓGICOS

Começamos com o problema de existência de conjuntos não mensuráveis à Lebesgue.

O paradoxo de Banach-Tarski afirma que dada uma bola sólida unitária B em dimensão 3 ou maior, B pode ser desmontada em um número finito de conjuntos, que podem ser remontados (depois de serem transformados por algumas rotações e translações[1]) em *duas* bolas unitárias, dobrando assim o seu volume.

A prova deste resultado usa de maneira essencial o axioma da escolha. Os conjuntos resultados são muito *patológicos*, "dispersões infinitas de pontos". Necessariamente, eles não são mensuráveis.

Solovay, em 1970, provou a existência de um modelo de teoria dos conjuntos, *sem* o axioma da escolha, para qual *todos* os conjuntos em $\mathbb{R}$ são mensuráveis à Lebesgue.

Portanto, a existência de conjuntos não mensuráveis no espaço Euclidiano depende do sistema axiomático considerado. Neste curso, sempre supomos a validade do axioma da escolha (logo, do lema de Zorn e suas outras consequências). Portanto, em nosso cenário, existem conjuntos não mensuráveis, o que mostraremos abaixo.

Exemplo 1. (de conjunto não mensurável à Lebesgue em $\mathbb{R}$) Considere a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ dada por

$$x \sim y : \quad x - y \in \mathbb{Q} \,.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sejam

$$x + \mathbb{Q} = \{x + r \colon r \in \mathbb{Q}\}$$

a classe de equivalência de x e

$$\mathbb{R}/\sim \ = \{x + \mathbb{Q} \colon x \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto quociente correspondente.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sua classe de equivalência $x + \mathbb{Q}$ também é densa em $\mathbb{R}$, portanto

$$(x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \neq \emptyset \,.$$

Pelo axioma da escolha, existe uma função

$$\mathbb{R}/\sim \ \ni c \mapsto x_c \in [0,1] \quad \text{tal que } x_c \in (x + \mathbb{Q}) \cap [0,1] \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R}/\sim \ .$$

Considere o conjunto

$$E := \{x_c \colon c \in \mathbb{R}/\sim\} \subset [0,1] \,.$$

Provaremos que E não é mensurável. Precisaremos das seguintes propriedades.

▪ Valem as inclusões de conjuntos

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q) \subset [-1, 2] \,. \tag{1}$$

De fato, dado $y \in [0,1]$, como as classes de equivalência particionam o espaço $\mathbb{R}$, ou seja como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}/\sim} c \,,$$

existe $c \in \mathbb{R}/\sim$ tal que $y \in c$.

[1] Ou seja, por transformações rígidas, que não mudam o volume de conjuntos mensuráveis.

Por outro lado, por definição (ou melhor, por escolha) $x_c \in (x+\mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Então, y e x_c pertencem a mesma classe de equivalência c, logo, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$y = x_c + q \in E + q\,.$$

Além disso, $q = y - x_c$, então $|q| = |y - x_c| \le 1$, portanto $y \in E + q$, com $q \in [-1,1]$.

Ademais, como $E \subset [0,1]$, seque que para todo $q \in [-1,1]$, temos $E+q \subset [-1,2]$, finalizando a prova de (1).

▪ Se $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ são diferentes, então os conjuntos $E+q_1$ e $E+q_2$ são disjuntos.
De fato, se $z \in E+q_1 \cap E+q_2$, então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}/\sim$ tais que

$$z = x_{c_1} + q_1 = x_{c_2} + q_2\,.$$

Logo, $x_{c_1} - x_{c_2} = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, ou seja, x_{c_1} e x_{c_2} pertencem a mesma classe de equivalência. Assim, $c_1 = c_2$, então $x_{c_1} = x_{c_2}$, e daí, $q_1 = q_2$.

Suponha por contradição que E seja mensurável. Então, para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ (que é um conjunto enumerável infinito), $E+q$ também é mensurável, e $\mathrm{m}(E+q) = \mathrm{m}(E)$.
Além disso, a união enumerável $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(E+q)$ é mensurável e, pela propriedade (1), sua medida satisfaz as desigualdades

$$0 < 1 = \mathrm{m}\left([0,1]\right) \le \mathrm{m}\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(E+q)\Big) \le \mathrm{m}\left([-1,2]\right) = 3 < \infty\,,$$

que está em contradição com

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(E+q)\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathrm{m}(E) = 0 \text{ ou } +\infty\,,$$

dependendo de $\mathrm{m}(E)$ ser zero ou positivo.
Concluímos que E não pode ser mensurável.

Acabamos o capítulo sobre conjuntos mensuráveis à Lebesgue com o critério de mensurabilidade de Carathéodory. Intuitivamente, este critério afirma que um conjunto é mensurável se e somente se não é patológico, no sentido que não contém pedaços que podem "ampliar a medida" de outros conjuntos (como acontece no paradoxo de Banach-Tarski).

Teorema 2. *(o critério de mensurabilidade de Carathéodory) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é mensurável à Lebesgue.
(ii) Para toda caixa B, temos

$$|B| = \mathrm{m}^\star(B \cap E) + \mathrm{m}^\star(B \setminus E)\,.$$

(iii) Para todo conjunto elementar A, temos

$$\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}^\star(A \cap E) + \mathrm{m}^\star(A \setminus E)\,.$$

(iv) Para todo conjunto aberto U, temos

$$\mathrm{m}(U) = \mathrm{m}^\star(U \cap E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E)\,.$$

(v) Para todo conjunto S, temos

$$\mathrm{m}^\star(S) = \mathrm{m}^\star(S \cap E) + \mathrm{m}^\star(S \setminus E)\,.$$

Demonstração. Como a medida exterior de Lebesgue é subaditiva, para todo conjunto S, sempre temos

$$\mathrm{m}^\star(S) \leq \mathrm{m}^\star(S \cap E) + \mathrm{m}^\star(S \setminus E)\,,$$

então, somente as desigualdades " $\geq$ " são relevantes neste contexto.

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Como E é mensurável e B é uma caixa (então, é um conjunto mensurável), $B \cap E$, $B \setminus E$ também são mensuráveis. Além disso, $B = (B \cap E) \sqcup (B \setminus E)$, logo

$$|B| = \mathrm{m}(B) = \mathrm{m}^\star(B \cap E) + \mathrm{m}^\star(B \setminus E)\,.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(iii)}}$ Seja A um conjunto elementar. Então, A pode ser escrito como uma união finita de caixas (quase) disjuntas:

$$A = \bigcup_{n=1}^N B_n, \quad \text{logo} \quad \mathrm{m}(A) = \sum_{n=1}^N |B_n|\,.$$

Portanto, para todo $1 \leq n \leq N$,

$$|B_n| = \mathrm{m}^\star(B_n \cap E) + \mathrm{m}^\star(B_n \setminus E)\,,$$

e somando por n,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(A) = \sum_{n=1}^N |B_n| &= \sum_{n=1}^N \mathrm{m}^\star(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^N \mathrm{m}^\star(B_n \setminus E) \\
&\geq \mathrm{m}^\star\Big(\bigcup_{n=1}^N B_n \cap E\Big) + \mathrm{m}^\star\Big(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus E\Big) \quad \text{pela subaditividade da medida exterior} \\
&= \mathrm{m}^\star(A \cap E) + \mathrm{m}^\star(A \setminus E)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(iv)}}$ A prova é similar a anterior. Seja U um conjunto aberto. Pelo Lema 3 da aula 8, U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas:

$$U = \bigcup_{n=1}^\infty B_n\,.$$

Pelo Lema 2 da aula 8,

$$\mathrm{m}(U) = \sum_{n=1}^N |B_n|\,.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$|B_n| = \mathrm{m}^\star(B_n \cap E) + \mathrm{m}^\star(B_n \setminus E)\,,$$

e somando por n,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(U) = \sum_{n=1}^\infty |B_n| &= \sum_{n=1}^\infty \mathrm{m}^\star(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^\infty \mathrm{m}^\star(B_n \setminus E) \\
&\geq \mathrm{m}^\star\Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \cap E\Big) + \mathrm{m}^\star\Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \setminus E\Big) \quad \text{pela } \sigma\text{-subaditividade da medida exterior} \\
&= \mathrm{m}^\star(U \cap E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iv)} \implies \text{(v)}}$ Seja $S \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto qualquer. Pela regularidade da medida exterior,

$$\mathrm{m}^\star(S) = \inf\{\mathrm{m}(U) \colon U \supset S \text{ aberto}\}\,.$$

Para cada aberto $U \supset S$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}^\star(U) &= \mathrm{m}^\star(U \cap E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E) \\ &\geq \mathrm{m}^\star(S \cap E) + \mathrm{m}^\star(S \setminus E) \quad \text{pela monotonicidade da medida exterior.} \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todo tal aberto U, concluímos que

$$\mathrm{m}^\star(S) \geq \mathrm{m}^\star(S \cap E) + \mathrm{m}^\star(S \setminus E)\,.$$

$\boxed{\text{(v)} \implies \text{(i)}}$ Supomos, por enquanto, que E seja limitado; então, em particular, sua medida exterior é finita: $\mathrm{m}^\star(E) < \infty$.

Vamos provar que E é quase aberto. Seja $\epsilon > 0$. Usando a regularidade da medida exterior, existe $U \supset E$ aberto tal que

$$\mathrm{m}^\star(U) \leq \mathrm{m}^\star(E) + \epsilon\,.$$

Como, por hipótese,

$$\mathrm{m}^\star(U) = \mathrm{m}^\star(U \cap E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E) = \mathrm{m}^\star(E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E)\,,$$

e como $\mathrm{m}^\star(E) < \infty$, concluímos que

$$\mathrm{m}^\star(U \setminus E) = \mathrm{m}^\star(U) - \mathrm{m}^\star(E) \leq \epsilon\,,$$

mostrando que E é quase aberto, logo mensurável.

Um conjunto não necessariamente limitado E pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos limitados

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \text{onde} \quad E_n := E \cap [-n, n]^d\,.$$

Verificamos que o argumento anterior é aplicável ao conjunto E_n, ou seja, que E_n satisfaz

$$\mathrm{m}^\star(F) \geq \mathrm{m}^\star(F \cap E_n) + \mathrm{m}^\star(F \setminus E_n)$$

para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}^\star(F) &= \mathrm{m}^\star(F \cap [-n,n]^d) + \mathrm{m}^\star(F \setminus [-n,n]^d) \quad (\text{já que } [-n,n]^d \text{ é mensurável}) \\ &= \mathrm{m}^\star(F \cap [-n,n]^d \cap E) + \mathrm{m}^\star(F \cap [-n,n]^d \setminus E) + \mathrm{m}^\star(F \setminus [-n,n]^d) \\ &\quad\ (\text{pela hipótese sobre } E, \text{ com } S := F \cap [-n,n]^d) \\ &\geq \mathrm{m}^\star\left(F \cap ([-n,n]^d \cap E)\right) + \mathrm{m}^\star\left(F \setminus ([-n,n]^d \cap E)\right) \\ &= \mathrm{m}^\star(F \cap E_n) + \mathrm{m}^\star(F \setminus E_n)\,. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da subaditividade da medida exterior e da identidade geral entre conjuntos

$$(A \cap B \setminus C) \cup (A \setminus B) = A \setminus (B \cap C)\,.$$

O caso de conjuntos limitados é assim aplicável a cada conjunto E_n, provando a sua mensurabilidade, e com isso, a mensurabilidade de $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. □

O critério de Carathéodory será muito importante para estender a construção da medida de Lebesgue em outros contextos, ou seja, para abstractizar este procedimento. A ideia é, dado um espaço X qualquer, escolher seus subconjuntos mensuráveis *básicos* (análogos a caixas no espaço Euclidiano) e definir uma medida natural para estes conjuntos. A medida exterior de qualquer subconjunto pode ser posteriormente definida como o custo ínfimo necessário para cobri-lo por uma união enumerável de conjuntos básicos. E finalmente, o critério de Carathéodory pode ser usado como definição do conceito de mensurabilidade, por exemplo, $E \subset X$ é mensurável se item (ii) do teorema anterior vale para todo conjunto básico B em X.

Uma prévia da integral de Lebesgue

Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dm(x) = \int f\,,$$

a integral de f com respeito a medida de Lebesgue, ou, simplesmente, a integral de Lebesgue.

Nem todas as funções podem ser integradas; aquelas que podem ser integradas são chamadas funções mensuráveis à Lebesgue.

O conceito de integração está relacionado ao da soma. Vamos considerar o conceito de somabilidade com mais atenção.

Somas infinitas (séries). Uma série infinita $\sum_{n\geq 1} c_n$ é somável se a sua sequência de somas parciais $S_N := \sum_{n=1}^{N} c_n$ converge. Vamos considerar duas situações especiais relevantes na construção da integral de Lebesgue.

- Soma infinita sem sinal

Suponha que $c_n \in [0, \infty]$ para todo $n \geq 1$, isto é, $\sum_{n\geq 1} c_n$ é uma série infinita *sem sinal*. Neste caso, a soma desta série existe, embora possa ser infinita, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n = \sup\left\{ \sum_{n\in\mathcal{F}} c_n \colon \mathcal{F} \subset \mathbb{N} \text{ finito} \right\}.$$

- Soma infinita absolutamente somável

Uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é chamada *absolutamente somável* se a série sem sinal $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é finita (o que, em particular, implica a somabilidade da série $\sum_{n\geq 1} c_n$).

Notação. Para um número $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ := \begin{cases} c & \text{se } c \geq 0 \\ 0 & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- := \begin{cases} 0 & \text{se } c \geq 0 \\ -c & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{-c, 0\}\,.$$

Note que

$$c^+,\, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-\,.$$

Com essas notações, uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é absolutamente somável se e somente se as séries sem sinais $\sum_{n\geq 1} c_n^+$ e $\sum_{n\geq 1} c_n^-$ são finitas. Neste caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-\,.$$

Portanto, a somabilidade (absoluta) de séries pode ser reduzida ao caso de séries sem sinais.

Construção da integral de Lebesgue. Definiremos este conceito em vários passos.

1. Seja $f = \mathbf{1}_E$ a função indicadora de um conjunto mensurável E. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \mathrm{m}(E) \, .$$

Mais geralmente, suponha que $f = \sum_{i=1}^k c_1 \mathbf{1}_{E_i}$ seja uma combinação linear de funções indicadoras de conjuntos mensuráveis E_i, com coeficientes $c_i \geq 0$ para todo $i \in [k] := \{1, \ldots, k\}$. Este tipo de função será chamada de função simples. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^k c_i \, \mathrm{m}(E_i) \, .$$

Esta definição corresponde à nossa intuição geométrica da integral de uma função não negativa como o volume abaixo do gráfico da função. Também, por construção, é uma operação linear (como deveria ser).

2. Suponha que $f \geq 0$ possa ser aproximada (de uma maneira razoável) por funções *simples*. Chamamos tal função "mensurável à Lebesgue". Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \sup \left\{ \int_{R^d} s \, d\mathrm{m} \colon s \leq f, \; s \text{ é uma função simples} \right\} \, .$$

3. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então $|f| \geq 0$. Escreva

$$f = f^+ - f^- \, ,$$

onde

$$f^+(x) := f(x)^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) := f(x)^- \, .$$

A função f é chamada *absolutamente integrável* se f^+ e f^- são funções mensuráveis (logo, $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também) e

$$\int_{R^d} |f| \, d\mathrm{m} < \infty \, .$$

Neste caso, defina

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \int_{R^d} f^+ \, d\mathrm{m} - \int_{R^d} f^- \, d\mathrm{m} \, .$$

A seguir, faremos uma apresentação detalhada de cada passo da construção acima.