

AULA 11: INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES SIMPLES

Começamos com a definição e as propriedades básicas de funções simples.

Definição 1. Uma função $s: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *simples* se

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ e E_i são conjuntos mensuráveis à Lebesgue para todo $i \in [k]$.

Ademais, $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ é uma função simples *sem sinal* se os coeficientes $c_i \in [0, +\infty]$ para todo $i \in [k]$.

Notação. Vamos fazer as seguintes *convenções* naturais sobre operações algébricas que envolvem $+\infty$.

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty \\ c \cdot \infty &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ 0 \cdot \infty &= 0 \\ \infty \cdot c &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ \infty \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Observação 1. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples. Os conjuntos mensuráveis E_1, \dots, E_k não precisam ser disjuntos. Porém, se for conveniente, pode-se supor que eles são disjuntos e até mesmo, que eles formam uma *partição* do espaço \mathbb{R}^d .

De fato, se (por simplicidade) $k = 2$, logo $s = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + c_2 \mathbf{1}_{E_2}$, como os dois conjuntos E_1 e E_2 determinam uma partição de espaço \mathbb{R}^d em quatro subconjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &= (E_1 \setminus E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \cup E_2)^c \\ &= (E_1 \cap E_2^c) \sqcup (E_2 \cap E_1^c) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1^c \cap E_2^c), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} s(x) = c_1 \mathbf{1}_{E_1}(x) + c_2 \mathbf{1}_{E_2}(x) &= \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^c \\ c_2 & \text{se } x \in E_1^c \cap E_2 \\ c_1 + c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2 \\ 0 & \text{se } x \in E_1^c \cap E_2^c \end{cases} \\ &= c_1 \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2^c} + c_2 \mathbf{1}_{E_2 \cap E_1^c} + (c_1 + c_2) \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} + 0 \mathbf{1}_{E_1^c \cap E_2^c}. \end{aligned}$$

O mesmo argumento vale com qualquer número k de conjuntos E_i , $i \in [k]$.

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, vamos denotar por $E^+ := E$ e por $E^- := E^c$. Então, com estas notações, os conjuntos E_1, \dots, E_k determinam uma partição

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}$$

em 2^k conjuntos mensuráveis, e, claramente,

$$s = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}}$$

para alguns coeficientes $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$.

Note que se $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, então, claramente $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k} \in [0, \infty]$.

Proposição 1. (*propriedades básicas de funções simples*) *Sejam s e σ duas funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então,*

- (1) $s + \sigma$ e cs são funções simples.
- (2) $s \cdot \sigma$ é uma função simples.
- (3) $s^+, s^-, |s|$ são funções simples.

Demonstração. O primeiro item é óbvio. O segundo segue do fato de que $\mathbf{1}_E \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E \cap F}$. Para provar o terceiro, seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos mensuráveis E_i , $i \in [k]$ são *disjuntos*. Então, evidentemente,

$$s^\pm = \sum_{i=1}^k c_i^\pm \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad |s| = \sum_{i=1}^k |c_i| \mathbf{1}_{E_i},$$

que são funções simples. □

Definição 2. (da integral de Lebesgue de uma função simples)

Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples *sem sinal*, então $c_i \in [0, \infty]$ para todo $i \in [k]$. Definimos a integral de s por

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, dm := \sum_{i=1}^k c_i m(E_i),$$

com as convenções acima mencionadas para operações com ∞ .

Ademais, uma função simples qualquer é dita *absolutamente integrável* se

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s| \, dm < \infty.$$

Neste caso, definimos a integral de s por

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, dm := \int_{\mathbb{R}^d} s^+ \, dm - \int_{\mathbb{R}^d} s^- \, dm.$$

Observação 2. A integral de uma função simples sem sinal (e então também a de uma função absolutamente integrável) é bem definida. De fato, dadas duas representações da função simples sem sinal s ,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

onde $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in [0, \infty]$, temos que

$$\sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j m(F_j).$$

Provamos isso em duas etapas. Em primeiro lugar, supomos que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ sejam disjuntos dois a dois. Portanto, $\{E_i \cap F_j\}_{(i,j) \in [k] \times [l]}$ também são disjuntos. Pela Observação 1, sem perda da generalidade, podemos supor que

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{j=1}^l F_j = \mathbb{R}^d.$$

Portanto, para todo $i \in [k]$ e $j \in [l]$,

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^l (E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^k (E_i \cap F_j),$$

logo

$$m(E_i) = \sum_{j=1}^l m(E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad m(F_j) = \sum_{i=1}^k m(E_i \cap F_j).$$

Note que se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ e se x pertence a esta interseção, então $c_i = s(x) = d_j$. Por outro lado, se $E_i \cap F_j = \emptyset$, então $m(E_i \cap F_j) = 0$. Logo, para todo $(i, j) \in [k] \times [l]$, tem-se

$$c_i m(E_i \cap F_j) = d_j m(E_i \cap F_j).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) &= \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=1}^l m(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i m(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l d_j m(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k d_j m(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^l d_j \sum_{i=1}^k m(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^l d_j m(F_j). \end{aligned}$$

Se $\{E_i\}_{i \in [k]}$ não são disjuntos, podemos substituí-los por conjuntos disjuntos. De fato, pela Observação 1,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} (c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k}) \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Ademais, como $c_i^- = 0$ para todo $i \in [k]$, pois $c_i \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} (c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k}) m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) &= \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_1^{\alpha_1} m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) + \dots + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_k^{\alpha_k} m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) \\ &= \sum_{\alpha_1=+, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_1 m(E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) + \dots \\ &+ \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \{+, -\}, \alpha_k=+} c_k m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k) \\ &= c_1 m\left(\bigcup_{\alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \dots \\ &+ c_k m\left(\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \{+, -\}} E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k\right) \\ &= c_1 m(E_1) + \dots + c_k m(E_k), \end{aligned}$$

assim estabelecendo que a integral de uma função simples sem sinal está bem definida.

Dizemos que uma propriedade $P(x)$ vale para quase todo ponto (abreviado q.t.p.) $x \in \mathbb{R}^d$ se

$$m \{x \in \mathbb{R}^d : P(x) \text{ não vale}\} = 0.$$

Por exemplo, dada uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, a afirmação $f = 0$ q.t.p. significa $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, ou seja,

$$m \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\} = 0.$$

Além disso, para duas funções f e g , a afirmação $f = g$ q.t.p. significa

$$m \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Filosofia de Lebesgue: Conjuntos de medida zero não importam em teoria da medida, ou seja, uma afirmação válida em q.t.p. é suficientemente boa.

Definição 3. O suporte (no sentido de teoria da medida) de uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é o conjunto:

$$\text{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}.$$

O seguinte resultado resume as propriedades básicas da integral de uma função simples sem sinal.

Proposição 2. Sejam $s, \sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ duas funções simples sem sinal, e seja $c \in [0, \infty]$. Então,

(i) (linearidade)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) \, dm &= \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, dm \\ \int_{\mathbb{R}^d} (cs) \, dm &= c \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm. \end{aligned}$$

(ii) (finitude)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, dm < \infty \quad \text{se e somente se} \quad s < \infty \text{ q.t.p. e } m(\text{supp}(f)) < \infty.$$

(iii) (nulidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, dm = 0 \quad \text{se e somente se} \quad s = 0 \text{ q.t.p.}$$

(iv) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\int s \leq \int \sigma$.

(v) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\int s = \int \sigma$.

Demonstração. A linearidade é óbvia por definição.

ii Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples sem sinal. Podemos supor que $c_i \in (0, \infty]$ para todo $i \in [k]$ e que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos. Então,

$$\text{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i.$$

Vamos começar com a implicação oposta.

Como $m(\text{supp}(f)) < \infty$, temos que $m(E_i) < \infty$ para todo $i \in [k]$.

Como $s < \infty$ q.t.p., se para algum $j \in [k]$, $c_j = \infty$, então $m(E_j) = 0$, logo $c_j m(E_j) = 0$.

Para todos os outros índices i , temos $c_i m(E_i) < \infty$. Portanto, $\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) < \infty$.

Provamos a implicação direta. Como $\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) < \infty$, e como $c_i > 0$ para todo $i \in [k]$, necessariamente $m(E_i) < \infty$, logo

$$m(\text{supp}(f)) = m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k m(E_i) < \infty.$$

Além disso, se para algum índice j temos $c_j = \infty$, como $c_j m(E_j) \leq \int s < \infty$, então necessariamente $m(E_j) = 0$. Portanto,

$$\{x: s(x) = \infty\} = \{x: \text{existe } j \in [k], x \in E_j \text{ e } c_j = \infty\} = \bigcup_{j: c_j = \infty} E_j,$$

logo

$$m(\{x: s(x) = \infty\}) = 0.$$

iii Como no item anterior, escrevemos $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, com $c_i > 0$ e E_i disjuntos, logo

$$\text{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i.$$

Se $s = 0$ q.t.p., então $m(\text{supp}(f)) = 0$, logo $m(E_i) = 0$ para todo $i \in [k]$, e daí,

$$\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = 0.$$

Por outro lado, se

$$\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = 0,$$

para todo $i \in [k]$ temos que $c_i m(E_i) = 0$, e como $c_i > 0$, tem-se $m(E_i) = 0$, mostrando que

$$m(\text{supp}(f)) = \sum_{i=1}^k m(E_i) = 0,$$

isto é, $s = 0$ q.t.p.

iv) Suponha que $s \leq \sigma$ q.t.p.. Pela Observação 1, podemos representar essas funções como

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

onde $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ são *partições* do espaço \mathbb{R}^d . Portanto, um argumento similar ao da Observação 2 implica

$$\begin{aligned} \int s &= \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i m(E_i \cap F_j) \\ \int \sigma &= \sum_{j=1}^l d_j m(F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l d_j m(E_i \cap F_j). \end{aligned}$$

Dados $i \in [k]$ e $j \in [l]$, ou $m(E_i \cap F_j) = 0$, e neste caso $c_i m(E_i \cap F_j) = d_j m(E_i \cap F_j)$, ou $m(E_i \cap F_j) > 0$, e neste caso, como $s \leq \sigma$ q.t.p., necessariamente temos $c_i \leq d_j$, logo $c_i m(E_i \cap F_j) \leq d_j m(E_i \cap F_j)$. Segue que $\int s \leq \int \sigma$.

Finalmente, item (v) é uma consequência imediata da monotonicidade da integral. \square

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de funções simples *com sinal*.

Proposição 3. Dadas $s, \sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funções simples absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) dm = \int_{\mathbb{R}^d} s dm + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma dm \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (cs) dm = c \int_{\mathbb{R}^d} s dm.$$

(ii) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\int s \leq \int \sigma$.

(iii) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\int s = \int \sigma$.

Demonstração. Exercício. \square