

AULA 12: FUNÇÕES MENSURÁVEIS À LEBESGUE (SEM SINAL)

Poderíamos pensar em uma função mensurável de duas maneiras: como uma função bem aproximável por funções simples ou, por analogia com o conceito de função contínua em topologia, como uma função para a qual a pré-imagem de qualquer conjunto relevante é mensurável.

Definimos o conceito de função mensurável à Lebesgue pela primeira maneira e depois provamos a equivalência entre essas abordagens.

Definição 1. Uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável à Lebesgue se f for o limite pontual de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, se existir uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Vamos introduzir algumas notações úteis.

Notação. Dada uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, \infty]$ e um subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$, denotamos por

$$\{f \in A\} := \{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

a preimagem de A pela função f .

Da mesma maneira, dado $\lambda \in [-\infty, \infty]$, seja

$$\{f > \lambda\} := \{x \in \mathbb{R}^d: f(x) > \lambda\} = f^{-1}((\lambda, \infty]).$$

Similarmente podemos definir $\{f \geq \lambda\}$, $\{f \leq \lambda\}$ e $\{f < \lambda\}$.

Essas notações têm um sabor probabilístico, onde $\{f \in A\}$ pode ser pensado como o evento que f pertença ao conjunto A .

A seguir caracterizamos a mensurabilidade de uma função sem sinal.

Teorema 1. Para uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$, as seguintes afirmações são equivalentes.

- (1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.
- (2) f é o limite em quase todo ponto de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^d$.
- (3) f é o limite de uma sequência não decrescente de funções simples, sem sinais, limitadas, com suportes limitados, ou seja, existe uma sequência

$$0 \leq s_1(x) \leq \dots \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \dots \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d$$

tal que, para todo $n \geq 1$, a função s_n é simples, limitada, $\text{supp}(s_n)$ é limitado e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

- (4) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (5) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \geq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (6) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f < \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (7) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \leq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (8) Para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (9) Para todo aberto $U \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.
- (10) Para todo fechado $F \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.

Alguns fatos técnicos. Antes de começar a prova do teorema acima, vamos sujar as mãos, aprendendo alguns segredos de ganha-pão deste negócio.¹

■ É evidente que para dois números reais x e y , temos

$$y \geq x \iff \forall \epsilon > 0, y > x - \epsilon \iff \forall m \geq 1, y > x - \frac{1}{m}.$$

Portanto, dados uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, \infty]$ e um número $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(1a) \quad \{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

ou seja, o evento $\{f \geq \lambda\}$, dado por uma desigualdade não estrita pode ser descrito por um processo enumerável envolvendo desigualdades estritas.

Similarmente, o oposto também vale. Como, evidentemente,

$$y > x \iff \exists \epsilon > 0, y \geq x + \epsilon \iff \exists m \geq 1, y \geq x + \frac{1}{m},$$

segue que

$$(1b) \quad \{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ f \geq \lambda + \frac{1}{m} \right\}.$$

Os eventos complementares $\{f < \lambda\}$ e $\{f \leq \lambda\}$ podem ser caracterizados do mesmo modo (ou, diretamente via as leis de De Morgan).

■ Considere $\{f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções, e sejam $\inf_{n \geq 1} f_n$ e $\sup_{n \geq 1} f_n$ as funções ínfimo e supremo pontuais, respectivamente. Como para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\inf_{n \geq 1} f_n(x) \geq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \geq \lambda$$

e

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) \leq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \leq \lambda$$

tem-se

$$(2a) \quad \left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e}$$

$$(2b) \quad \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq \lambda\}.$$

Portanto, usando (1a) e as leis de De Morgan, temos

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} &= \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\}^c \\ &= \bigcap_{m \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq 1} \left\{ f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\} \right)^c = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\}, \end{aligned}$$

e outras relações similares.

Suponha que a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge pontualmente. Então, como

$$\lim_{n \geq \infty} f_n = \limsup_{n \geq 1} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k,$$

¹Pintar um quadro, além de escolher um bom assunto, de ter imaginação e talento, requer também reunir suas ferramentas, saber como diluir e combinar tinta, como preparar a tela e etc. Por enquanto, vamos preparar as tintas.

temos

$$(3) \quad \begin{aligned} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq \lambda \right\} &= \left\{ \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ \sup_{k \geq n} f_k \geq \lambda \right\} \\ &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left\{ f_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 1. Considere uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ e seja $\lambda \geq 0$. A equivalência entre itens (4) e (5) segue das identidades (1a),(1b):

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ f \geq \lambda + \frac{1}{m} \right\} \quad \text{e} \quad \{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

já que toda união e interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Ademais, um conjunto E é mensurável se e somente se seu complemento E^c é mensurável. Como

$$\{f < \lambda\} = \{f \geq \lambda\}^c \quad \text{e} \quad \{f \leq \lambda\} = \{f > \lambda\}^c,$$

temos que (6) \iff (5) e (7) \iff (4).

Seja $I \subset [0, \infty)$ um intervalo qualquer, por exemplo, $I = [a, b)$. Então,

$$\{f \in I\} = \{f \in [a, b)\} = \{f \geq a\} \cap \{f < b\},$$

portanto, (5) e (6) (que já são equivalentes), implicam (8). Obviamente, (8) implica (4).

Todo conjunto aberto $U \subset [0, \infty)$ é uma união enumerável de intervalos. Portanto, (8) implica (9), que claramente implica (4).

Um conjunto $F \subset [0, \infty)$ é fechado se e somente se seu complemento F^c é aberto. Além disso,

$$\{f \in F\}^c = \{f \in F^c\},$$

portanto, (9) e (10) são equivalentes.

Provamos, assim, que as afirmações de (4) até (10), a respeito da pré-imagem pela função f de vários tipos de conjuntos “relevantes” são, todas, equivalentes.

Evidentemente, (3) \implies (1) \implies (2). Portanto, para fechar o ciclo de equivalências, basta provar que (2) \implies (5) e que (8) \implies (3).

(2) \implies (5) Considere uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ e suponha que exista uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ converge em *todo* ponto $x \in \mathbb{R}^d$ (mas não necessariamente para $f(x)$). De fato, em todo ponto onde essa sequência não converge (isto é, para um conjunto *negligenciável* de pontos) podemos trocar o valor de cada função $s_n(x)$ por 0; assim, a nova sequência converge em todo ponto, e ainda converge para f em quase todo ponto. Portanto, dado $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \{f \geq \lambda\} &= \{f \geq \lambda \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq f\} \cup \{f \geq \lambda \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f\} \\ &= \{f \geq \lambda \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq f\} \cup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lambda \right\}. \end{aligned}$$

O primeiro conjunto na união acima é mensurável pois é negligenciável. Pela fórmula 3, o segundo conjunto pode ser descrito como

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left\{ s_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

ou seja, como o resultado de uma aplicação enumerável de uniões ou interseções de conjuntos do tipo $\{s_k > t\}$ para alguns $k \geq 1$ e $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para concluir que $\{f \geq \lambda\}$ seja mensurável, basta provar o mesmo tipo de propriedade para funções simples. Sejam s uma função simples sem sinal e $t \in [0, \infty)$. Provaremos que o conjunto $\{s > t\}$ é mensurável.

Escrevemos $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos, enquanto os coeficientes $c_i > 0$ podem ser considerados distintos (agrupando termos com coeficientes iguais).

Sem perda de generalidade, supomos que

$$c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq \infty.$$

Então, existe um índice i , com $0 \leq i < k$, tal que $t \in [c_i, c_{i+1})$, e daí,

$$\{x: s(x) > \lambda\} = \{x: s(x) > c_i\} = \{x: s(x) \in \{c_{i+1}, \dots, c_k\}\} = E_{i+1} \cup \dots \cup E_k,$$

que é um conjunto mensurável, assim finalizando a prova dessa implicação.

(8) \implies (3) Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ e suponha que $\{f \in I\}$ seja mensurável para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$. Vamos construir uma sequência não decrescente de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n \geq 1}$ tal que $s_n \rightarrow f$ em todo ponto, e cada s_n é limitada e possui suporte limitado.

Gíria: Dizemos que uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, \infty]$ “mora numa caixa” se for limitada e possuir suporte limitado, ou seja, se existirem $A, B < \infty$ tais que $|f(x)| \leq A$ para todo $|x| \leq B$ e $f(x) = 0$ para todo $|x| > B$.

Fixe $n \geq 1$ e considere a caixa $B_n := [-n, n]^d \times [0, n] \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty]$. Para “localizar” f dentro da caixa B_n , fazemos um truncamento vertical e um truncamento horizontal de f . Mais precisamente, definimos $s_n(x)$ como 0 se $|x| > n$ e como n se $f(x) \geq n$. Resta definir $s_n(x)$ para pontos x com $f(x) < n$.

A ideia nova e profunda para construir uma função simples s_n aproximando f razoavelmente é considerar uma *partição do contradomínio* $[0, \infty]$ da função f .²

Então, particionamos o intervalo $[0, n)$ (o resto do contradomínio já foi abordado) em intervalos diádicos de comprimento $\frac{1}{2^n}$ e definimos $s_n(x)$ como o ponto extremo menor de cada tal intervalo, quando $f(x)$ pertence a esse intervalo. Mais formalmente, seja

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \\ \frac{j}{2^n} & \text{se } f(x) \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}), \quad j = 0, \dots, n 2^n - 1. \end{cases} \\ &= \left(n \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=1}^{n 2^n - 1} \frac{j}{2^n} \mathbf{1}_{\{f \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})\}} \right) \mathbf{1}_{\{|x| \leq n\}}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\{f \in I\}$ é mensurável para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$, a função s_n definida acima é simples. Evidentemente, por construção, $0 \leq s_n \leq f$ e s_n mora na caixa B_n . Usando a propriedade de encaixamento dos intervalos diádicos, não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ em todo ponto, e para todo n .

Resta provar que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Fixe tal ponto x .

Se $f(x) = \infty$, então, para todo $n \geq 1$, $s_n(x) = n \rightarrow \infty = f(x)$.

²Ao contrário da integral de Darboux, onde consideramos partições do *domínio* da função e, em seguida, as funções escada correspondentes.

Se $f(x) < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$ e $|x| \leq N$. Então, para todo $n \geq N$, temos que $s_n(x) = \frac{j}{2^n}$ e $f(x) \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$, para algum $j \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$. Portanto,

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0,$$

mostrando que $s_n(x) \rightarrow f(x)$. \square

Em seguida, mostramos que o conjunto de funções mensuráveis à Lebesgue (sem sinais) é fechado sob várias operações.

Proposição 1. *Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $\inf_{n \geq 1} f_n$ e $\sup_{n \geq 1} f_n$ são mensuráveis.*

Ademais, se $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então f é mensurável também.

Demonstração. Seja $\lambda \geq 0$. Como, para todo $n \geq 1$, f_n é mensurável, pelo teorema anterior, os conjuntos $\{f_n \geq \lambda\}$ e $\{f_n \leq \lambda\}$ são mensuráveis. Usando (2a) e (2b), temos que

$$\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e} \quad \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq \lambda\},$$

o que prova a mensurabilidade das funções ínfimo e supremo.

A segunda afirmação, sobre a mensurabilidade do limite de uma sequência de funções mensuráveis segue da mesma forma usando (3):

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left\{ f_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\}.$$

\square

Proposição 2. *Sejam f e g duas funções mensuráveis sem sinais. Então, $f + g$ e $f g$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Como f e g são mensuráveis, por definição, elas são limites pontuais de funções simples $\{s_n\}_{n \geq 1}$ e, respectivamente $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$. Como $s_n + \sigma_n$ e $s_n \sigma_n$ são funções simples e

$$s_n + \sigma_n \rightarrow f + g, \quad s_n \sigma_n \rightarrow f g,$$

concluimos que $f + g$ e $f g$ são mensuráveis. \square