

AULA 13: A INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS SEM SINAL

Como vimos, toda função mensurável sem sinal pode ser aproximada por baixo por funções simples, para as quais já definimos o conceito de integração à Lebesgue. Podemos então definir a integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal por meio dessa aproximação.

Definição 1. Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável. Definimos sua integral à Lebesgue por

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f \text{ q.t.p., } s \text{ é simples e sem sinal} \right\}.$$

Observação 1. Obviamente, dada uma função mensurável sem sinal f , tem-se

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \infty.$$

Além disso, integração à Lebesgue é uma operação monótona:

$$\text{se } f \leq g \text{ q.t.p., então } \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} g \, dm,$$

já que, se s for uma função simples sem sinal tal que $s \leq f$ q.t.p., então também $s \leq g$ q.t.p..

Observação 2. Na definição da integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal f , podemos nos restringir a tipos mais específicos de funções simples, a saber, aquelas que *moram numa caixa*, e que aproximam f por baixo em *todo* ponto:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f, s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}.$$

Obviamente, $\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm$ é maior do que ou igual ao lado direito da igualdade abaixo. Vamos provar a desigualdade oposta, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f, s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}.$$

Fixe uma função simples sem sinal s tal que $s \leq f$ q.t.p. e seja

$$\mathcal{Z} := \{x: s(x) > f(x)\},$$

então $m(\mathcal{Z}) = 0$.

Escreva $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são conjuntos mensuráveis disjuntos.

Para todo $i \in [k]$ e $n \geq 1$ definimos os truncamentos

$$c_{i,n} := \min\{c_i, n\} \quad \text{e} \quad E_{i,n} := E_i \cap [-n, n]^d \setminus \mathcal{Z},$$

e a função simples

$$s_n := \sum_{i=1}^k c_{i,n} \mathbf{1}_{E_{i,n}}.$$

Claramente, $s_n \geq 0$, $s_n \leq f$ em todo ponto e s_n mora na caixa $[-n, n]^d \times [0, n]$.

Além disso, para cada $i \in [k]$ tem-se

$$c_{i,n} \rightarrow c_i \quad \text{e} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos,

$$m(E_{i,n}) \rightarrow m(E_i \setminus \mathcal{Z}) = m(E_i).$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\int s_n = \sum_{i=1}^k c_{i,n} m(E_{i,n}) \rightarrow \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \int s.$$

Para finalizar o argumento, consideramos separadamente os casos $\int f < \infty$ ou $\int f = \infty$. Se $\int f < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe s simples, sem sinal, tal que $s \leq f$ q.t.p. e

$$\int f \leq \int s + \epsilon.$$

Considerando a sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ correspondente a s definida acima, como temos

$$\int s_n \rightarrow \int s \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s \leq \int s_N + \epsilon.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \int f &\leq \int s_N + 2\epsilon \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, dm : \sigma \leq f, \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\} + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, provamos a afirmação nesse caso.

Se $\int f = \infty$, então, para todo $M < \infty$, existe s simples, sem sinal, $s \leq f$ q.t.p. tal que

$$\int s > M.$$

De novo, considerando a sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ correspondente a s definida acima, $\int s_n \rightarrow \int s$ quando $n \rightarrow \infty$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s_N > M.$$

Portanto,

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, dm : \sigma \leq f, \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\} \geq \int s_N > M \rightarrow \infty,$$

terminando a prova.

O próximo teorema, o primeiro resultado sobre a troca do limite com a integral de Lebesgue, é um dos mais importantes na teoria da medida, e exemplifica a vantagem da integração de Lebesgue sobre a de Riemann-Darboux. A sua demonstração também ilustra um raciocínio comum na teoria de probabilidades bem como na teoria da medida, a saber, *um argumento de tempos de parada*.

Teorema 1. (de convergência monótona) *Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \geq 1} f_n$ é mensurável e*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Demonstração. Pela Proposição 1 da aula 13, a função limite f é, de fato, mensurável à Lebesgue. Além disso, pela monotonicidade da integral, já que, para todo $n \geq 1$, $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue que

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f,$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \sup_{n \geq 1} \int f_n \leq \int f.$$

Para provar a desigualdade oposta,

$$\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

usando (1), basta considerar uma função simples sem sinal $s \leq f$, que mora numa caixa, e mostrar que

$$\int s \leq \sup_{n \geq 1} \int f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Podemos representar

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

onde, para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ (os coeficientes c_i são finitos, pois s mora numa caixa, então é limitada) e os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos.

Fixe $\epsilon > 0$. Dados $i \in [k]$ e $x \in E_i$ então $s(x) = c_i$ e

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) = f(x) \geq s(x) = c_i > (1 - \epsilon)c_i.$$

Portanto, existe um *tempo limiar* $n_x \in \mathbb{N}$, tal que

$$f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i \quad \text{para todo } n \geq n_x.$$

O problema é a falta da *uniformidade*: a taxa de convergência da sequência $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ para $f(x)$ depende de x , e a priori poderia variar muito, dependendo de x . Por isso, o limiar correspondente n_x também poderia variar muito. A ideia é usar um argumento de tempos de parada, onde impomos alguma uniformidade. Mais precisamente, dado um tempo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_{i,n} := \{x \in E_i : f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i\}$$

o conjunto de elementos de E_i tendo o comportamento desejado no mesmo tempo dado n .

Como, para todo $x \in E_i$ temos $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, segue que $E_{i,n} \subset E_{i,n+1}$. Além disso, já que, eventualmente, todo ponto $x \in E_i$ possui um tempo limiar n_x após o qual o comportamento desejado $f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i$ acontece, concluímos que

$$\bigcup_{n \geq 1} E_{i,n} = E_i, \quad \text{logo } E_{i,n} \nearrow E_i \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, pelo teorema de convergência monótona *para conjuntos* (que já foi estabelecido),

$$(2) \quad m(E_{i,n}) \rightarrow m(E_i) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente, dado um tempo $n \geq 1$, como $f_n \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $i \in [k]$ tem-se

$$f_n(x) \geq (1 - \epsilon)c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x).$$

Como os conjuntos $E_{i,n} \subset E_i$, onde $i \in [k]$, são disjuntos, somando sobre $i \in [k]$ obtemos

$$f_n(x) \geq \sum_{i=1}^k (1 - \epsilon)c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) = (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}(x).$$

Integrando em x temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \, dm(x) &\geq (1 - \epsilon) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) \right) dm(x) \\ &= (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i m(E_{i,n}). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e usando (2), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm \geq (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = (1 - \epsilon) \int s \, dm.$$

Finalmente, passando $\epsilon \rightarrow 0$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm \geq \int s \, dm,$$

finalizando a prova. □

Observação 3. No teorema anterior, a hipótese que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência não decrescente (em todo ponto) pode ser enfraquecida para *quase* todo ponto, já que, trocando o valor de cada função para zero nos pontos onde a sequência não possui esse comportamento (então, em um conjunto negligenciável), não muda o valor da integral, então não afeta a conclusão.

Observação 4. Seja $\{E_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis e suponha que

$$E_n \nearrow E \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente as funções indicadoras correspondentes $\{\mathbf{1}_{E_n}\}_{n \geq 1}$ formam uma sequência não decrescente de funções mensuráveis, e $\mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \mathbf{1}_E$ quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 1 então implica

$$m(E_n) = \int \mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \int \mathbf{1}_E = m(E).$$

Portanto, o teorema de convergência monótona para funções (Teorema 1) é uma extensão do teorema de convergência monótona para conjuntos (Teorema 1 da aula 9). Contudo, como vimos, o resultado mais fraco (para conjuntos) foi usado, de uma maneira essencial na prova do resultado mais forte (sobre funções).

O corolário a seguir nos permitirá no futuro, ao estabelecer certas propriedades (que são fechadas sob limites) de funções mensuráveis, reduzir à situação mais conveniente de uma função limitada ou de uma função com suporte limitado ou mesmo de uma função localizada em uma caixa.

Corolário 1. Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável.

- (1) (Truncamento vertical) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento vertical da função f até o nível n , ou seja:

$$f_n := \min\{f, n\}.$$

Então, f_n é mensurável, limitada (por n) e $f_n \nearrow f$ quando $n \rightarrow \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

- (2) (Truncamento horizontal) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento horizontal da função f no domínio $\{|x| \leq n\}$, ou seja:

$$f_n := f \mathbf{1}_{\{|x| \leq n\}}.$$

Então, f_n é mensurável, possui suporte limitado (contido na caixa $[-n, n]^d$) e $f_n \nearrow f$ quando $n \rightarrow \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

- (3) (Localização numa caixa) Sejam $x_n \nearrow \infty$ e $y_n \nearrow \infty$ duas sequências de números (por exemplo, $x_n = y_n = n$ para todo $n \geq 1$). Considere a localização da função f dentro da caixa $B_n := [-x_n, x_n]^d \times [0, y_n]$, ou seja:

$$f_n := \min\{f, y_n\} \mathbf{1}_{\{|x| \leq x_n\}}.$$

Então, f_n é mensurável, f_n mora na caixa B_n e $f_n \nearrow f$ quando $n \rightarrow \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$