AULA 15: FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE INTEGRÁVEIS

Definição 1. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada absolutamente integrável à Lebesgue se f é mensurável à Lebesgue e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mathrm{m} < \infty$. Neste caso, definimos

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} f^+ \, d\mathrm{m} - \int_{\mathbb{R}^d} f^- \, d\mathrm{m} \, .$$

Observação 1. Como $0 \le f^+, f^- \le |f|$, pela monotonicidade da integral sem sinal, tem-se

$$0 \le \int f^+, \int f^- \le \int |f| < \infty$$

logo $\displaystyle\int f^+, \int f^- \in \mathbb{R}$, então

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}$$

Assim, a integral de Lebesgue de uma função absolutamente integrável é bem definida.

Observação 2. Suponha que $f = f_1 - f_2$ seja uma representação de f como uma diferença de funções mensuráveis sem sinais f_1 e f_2, onde $\displaystyle\int f_1, \int f_2 < \infty$. Então, $\displaystyle\int f = \int f_1 - \int f_2$.

De fato, como $f_1 - f_2 = f = f^+ - f^-$, temos

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2,$$

onde f_1, f^-, f^+, f_2 são funções mensuráveis *sem* sinais. Pela aditividade da integral sem sinal, tem-se

$$\int f_1 + \int f^- = \int f^+ + \int f_2 \, ,$$

logo,

$$\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^- = \int f \, .$$

A maioria das propriedades da integral sem sinal também vale para funções absolutamente integráveis.

Teorema 1. *Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$*

(1) (linearidade) $f + g$ e cf são absolutamente integráveis e $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$, $\displaystyle\int cf = c \int f$.

(2) (monotonicidade) Se $f \le g$ em q.t.p, então $\displaystyle\int f \le \int g$.

(3) (a desigualdade triangular) $\displaystyle\left| \int f \right| \le \int |f|$.

(4) (divisibilidade) Se E é um conjunto mensurável, então $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são absolutamente integráveis e $\displaystyle\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$.

Demonstração do Teorema 1.

(1) Por um teorema anterior, $f+g$ e cf são mensuráveis. Além disso, como $|f+g| \le |f|+|g|$ e $|f+g|$, $|f|$, $|g|$ são funções mensuráveis sem sinal, pela monotonicidade e linearidade da integral sem sinal temos

$$\begin{aligned}\int |f+g| &\le \int (|f|+|g|) \\ &= \int |f| + \int |g| < \infty\end{aligned}$$

mostrando a integrabilidade absoluta de $f+g$.

Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$, temos que

$$f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),\ (f^+ + g^+) \text{ e } (f^- + g^-)$$

são funções mensuráveis sem sinais e, pela observação anterior,

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \left(\int f^+ + \int g^+\right) - \left(\int f^- + \int g^-\right) \quad \text{(pela linearidade da integral sem sinal)} \\ &= \left(\int f^+ - \int f^-\right) + \left(\int g^+ - \int g^-\right) \\ &= \int f + \int g\,.\end{aligned}$$

A prova da identidade $\displaystyle\int cf = c\int f$ é exercício.

(2) $f \le g$ em q.t.p implica $g - f \ge 0$ q.t.p. Portanto, $\displaystyle\int (g-f) \ge 0$. Mas $g = f + (g-f)$ e, pela aditividade da integral,

$$\int g = \int f + \int (g-f) \ge \int f\,.$$

(3) Temos que $f \le |f|$ e $-f \le |f|$. Pela monotonicidade da integral,

$$\int f \le \int |f| \qquad \text{e} \qquad \int (-f) \le \int |f|$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int f\right| &= \max\left\{\int f, -\int f\right\} \\ &= \max\left\{\int f, \int (-f)\right\} \le \int |f|\,.\end{aligned}$$

(4) Como $\mathbf{1}_E$ e $\mathbf{1}_{E^\complement}$ são funções simples, logo mensuráveis, pelo Teorema **??**, $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso, $|f \cdot \mathbf{1}_E| \le |f|$ então $\displaystyle\int |f \cdot \mathbf{1}_E| \le \int |f| < \infty$, mostrando que $f \cdot \mathbf{1}_E$ é absolutamente integrável. O mesmo vale para $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$. Claramente,

$$f = f \cdot \mathbf{1}_E + f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$$

e usando a linearidade da integral, segue que

$$\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement} \, .$$

□

Observação 3. Dados uma função absolutamente integrável $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável E, denotamos por

$$\int_E f \, d\,\mathrm{m} := \int f \cdot \mathbf{1}_E \, d\mathrm{m} \, .$$

A propriedade da divisibilidade se torna

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f \, .$$

Ademais, uma função $f \colon E \to \mathbb{R}$ é dita mensurável (respetivamente absolutamente integrável) se a extensão dela por 0, $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in E \\ 0 & \text{se} \quad x \notin E \, . \end{cases}$$

for mensurável (respetivamente absolutamente integrável). Neste caso, $\displaystyle\int_E f \, d\,\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f} \, d\,\mathrm{m} \, .$

A compatibilidade da integral de Lebesgue com a integral de Riemann-Darboux

O objetivo da construção da integral de Lebesgue foi obter um conceito mais geral e mais flexível. Provamos que, de fato, a integral de Lebesguq é uma extensão da integral de Riemann-Darboux.

Exercício 1. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função contínua em q.t.p.. Então f é mensurável à Lebesgue.

Observação 4. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável localizada em uma caixa. Então f é absolutamente integrável.

De fato, se $[-K, K] \times [-M, M]$ é a caixa onde f mora, isto é, se

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo} \, \|x\| > K \text{ e}$$
$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo} \, \|x\| \leq K,$$

então

$$|f| \leq M \, \mathbf{1}_{[-K,K]^d},$$

logo

$$\int |f| \, d\mathrm{m} \leq \int M \, \mathbf{1}_{[-K,K]^d} \, d\mathrm{m} \leq M(2K)^d < \infty.$$

Teorema 2. *Seja $f \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann-Darboux. Então f é absolutamente integrável e*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mathrm{m}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Lebesgue para funções integráveis à Riemann, f é contínua em quase todo ponto. Pelo exercício anterior f é mensurável.

Além disso, f é limitada, o suporte dela, o intervalo $[a, b]$, é limitado, então f mora em uma caixa. Pela observação anterior f é absolutamente integrável.

Para provar a igualdade entre as integrais de Riemann-Darboux e a de Lebesgue, consideramos no início uma função escada

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{I_k}.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} c_k \left| I_k \right| .$$

Uma função escada também é simples, então

$$\int_{[a,b]} s\, d\mathrm{m} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathrm{m}(I_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left| I_k \right| .$$

Vamos considerar o caso geral de uma função integrável a Riemann-Darboux qualquer.

Dado $\epsilon > 0$, como f é Darboux integrável, existem duas funções escada $s \leq f \leq \sigma$ tais que

$$\int_a^b \sigma \; - \int_a^b s \; \leq \epsilon.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma.$$

Por outro lado, toda função escada também é simples, e pela monotonicidade da integral de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \sigma.$$

Como os conceitos de integrabilidade já coincidem para funções escada, concluímos que

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma \quad \text{e}$$
$$\int_a^b s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_a^b \sigma.$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f \; - \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_a^b \sigma \; - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como ϵ foi arbitrário, segue que

$$\int_a^b f \; = \int_{[a,b]} f.$$

$\square$

Exercício 2. Se a integral imprópria f em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é convergente, então f é absolutamente integrável e sua integral de Lebesgue coincide com sua integral de Riemann imprópria.

Essa formulação é um pouco vaga, parte do exercício é esclarecê-la.

O espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$

Seja $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as funções absolutamente integráveis à Lebesgue. Então $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço vetorial e a integral de Lebesgue é uma transformação linear neste espaço. O objetivo é definir uma norma em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Note que, dada f em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, se $\int |f| \, dm = 0$, então $|f| = 0$ em q.t.p., logo $f = 0$ em q.t.p. (mas não necessariamente em todo ponto). Então, $\int |f| \, dm = 0$ não implica $f = 0$.

A relação

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f = g \quad \text{em} \quad \text{q.t.p.}$$

é uma equivalência em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Seja

$$L^1(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)/ \sim$$

o espaço quociente correspondente.

Sempre identificamos uma classe de equivalência, ou seja, um elemento do espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ com qualquer representante dela. Portanto, dizemos "Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ uma função" em vez de "Seja $[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$, onde f é um representante desta classe de equivalência".

Isso é consistente com a filosofia de Lebesgue que afirma que conjuntos de medida zero não importam nesta teoria.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, dm.$$

A função $\|\cdot\|_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ é uma norma.

- $\|f\|_1 = \int |f| \geq 0$ e se $\int |f| = 0$, então $f = 0$ em q.t.p., ou seja $f \sim 0$ (a função constante 0).
- se $c \in \mathbb{R}$ então
$$\|cf\|_1 = \int |cf| = \int |c| \, |f| = |c| \int |f| = |c| \, \|f\|_1 .$$
- se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então f e g são absolutamente integráveis, logo $f + g$ também é absolutamente integrável e
$$|f + g| \leq |f| + |g|$$
em todo ponto.

  Pela monotonicidade da integral,
$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \leq \int \big(|f| + |g| \big) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 ,$$
mostrando a desigualdade triangular.

Concluímos que $L^1(\mathbb{R}^d)$ munido com $\|\cdot\|_1$, chamada "a norma um", é um espaço normado. Provaremos mais tarde que é, na verdade um espaço de Banach.

A seguir re-enunciaremos a desigualdade de Markov no contexto de funções absolutamente integráveis.

Teorema 3 (a desigualdade de Chebyshev)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Demonstração. A função $|f|$ é mensurável e sem sinal, logo, pela desigualdade de Markov,

$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\int |f| \, d\mathrm{m}}{\lambda} = \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

$\square$

Para finalizar, vamos provar a invariância por translações da integral de Lebesgue. A prova usa um argumento muito comum na teoria da medida, que chamamos do "mecanismo padrão".

Teorema 4 (invariância por translações)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^d$, seja $f_a \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,*

$$f_a(x) := f(x+a)$$

a translação de f por a. Então f_a é absolutamente integrável e

$$\int f(x+a) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Demonstração. A prova do teorema consiste em alguns passos.

Passo 1: A função f é a função indicadora de um conjunto mensurável:

$$f = \mathbf{1}_E.$$

Então,

$$f_a(x) = f(x+a) = \mathbf{1}_E(x+a) = \mathbf{1}_{E-a}(x).$$

Pela invariância por translação da medida de Lebesgue, o conjunto $E-a$ é mensurável e

$$\mathrm{m}(E-a) = \mathrm{m}(A),$$

provando a mensurabilidade de f_a e também que

$$\int f_a d\mathrm{m} = \int \mathbf{1}_{E-a} d\mathrm{m} = \mathrm{m}(E-a) = \mathrm{m}(E) = \int \mathbf{1}_E d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 2: A função f é uma função simples, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_1},$$

onde E_i são conjuntos mensuráveis.

Pelo passo anterior e a linearidade da integral, neste caso

$$f_a = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i - a}$$

também é simples e

$$\int f_a d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 3: Suponha que $f \colon \mathbb{R}^d \to [a,b]$ seja uma função mensurável sem sinal. Então existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$s_n \to f(x) \text{ quando } n \to \infty.$$

Então,

$$s_n(x+a) \to f(x+a) \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, f_a é mensurável e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int f(x+a) d\mathrm{m} = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x+a) d\mathrm{m} = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Passo 4: Finalmente, dada uma função absolutamente integrável $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, considerando a sua representação

$$f = f^+ - f^-, \text{ onde } f^+, f^- \geq 0,$$

pelo passo anterior segue que f_a^+, f_a^- são mensuráveis, logo f_a é mensurável e

$$\int f_a = \int f_a^+ - \int f_a^- = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

□

O *mecanismo padrão* pode ser usado para provar afirmações do tipo

"para toda função mensurável, vale uma certa propriedade".

O argumento consiste em estabelecer essa propriedade passo a passo, para:

(1) Funções indicadoras de conjuntos mensuráveis. Neste caso, a propriedade se torna uma afirmação sobre conjuntos mensuráveis.
(2) Funções simples. Neste caso, usamos a possível linearidade da propriedade a ser estabelecida.
(3) Funções simples sem sinais. Neste caso, usamos a aproximação de funções mensuráveis por funções simples e, possivelmente, alguns teoremas de limite para a integral de Lebesgue.
(4) Funções absolutamente integráveis. Usamos a representação $f = f^+ - f^-$ de tal função e a linearidade da propriedade dada.