AULA 17A: ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

σ-ÁLGEBRAS E ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1. Dado um conjunto X, uma σ-álgebra sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,
(2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^{\complement} \in \mathcal{B}$,
(3) se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto (o espaço ambiente) e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sobre X é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

Observação 1. Note que o espaço ambiente $X = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{B}$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n \geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n^{\complement} \right)^{\complement} \in \mathcal{B}\,.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de σ-álgebras.

Exemplo 1 (de σ-álgebras)**.** Seja X um espaço ambiente.

(1) A σ-álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$.
(2) A σ-álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E \colon E \subset X\}$.
(3) A σ-álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$$

de X em "átomos", seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha \colon \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a σ-álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \varnothing \sqcup X,$$

enquanto a σ-álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\}\,.$$

(4) A σ-álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real $\mathbb{R}$ em intervalos diádicos de geração n,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a σ-álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

Geração de σ-álgebras. Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que $\mathcal{B}'$ é *mais fina* do que $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é mais grosseira do que $\mathcal{B}'$.

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de σ-álgebras sobre X também é uma σ-álgebra sobre X, o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 2. Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço ambiente X, seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{B} \colon \mathcal{B} \supset \mathcal{F},\, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma - \text{álgebra}\} \,.$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra sobre X chamada a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Ela é a menor (ou a mais grosseira) σ-álgebra que contém a coleção $\mathcal{F}$.

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como 2^X é uma σ-álgebra, a interseção de σ-álgebras acima é bem definida.

Definição 3 (a σ-álgebra de Borel)**.** Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a σ-álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \left\{ U \subset \mathbb{R}^d \colon U \text{ aberto} \right\} \,.$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer $(X, \mathcal{T})$,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{U \subset X \colon U \text{ aberto}\}$$

é chamada a σ-álgebra de Borel do espaço $(X, \mathcal{T})$.

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos*.

Exemplo 2 (de conjuntos borelianos)**.** Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo F_σ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo G_δ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

O mecanismo padrão para conjuntos. Considere uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$. Dada uma propriedade P sobre subconjuntos de X, para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

(1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;

(2) A coleção

$$\mathcal{A} := \{E \subset X \colon P(E) \text{ vale}\}$$

é uma σ-álgebra, ou seja,

- $P(\varnothing)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^{\complement})$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n \geq 1} E_n)$ vale.

Proposição 1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em X.*

Demonstração. Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y.

(1) Para todo conjunto aberto E in Y, como f é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.

(2) Seja

$$\mathcal{A} := \left\{E \in \mathcal{B}(Y) \colon f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\right\} .$$

Tem-se

- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma σ-álgebra, $f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^{\complement}) = f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma σ-álgebra, segue que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)\,,$$

mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

□

Observação 2. A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira que a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(R^d)\,.$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a σ-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função "escada do diabo" de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

Exercício 1. Sejam $\mathcal{C} \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor e $c\colon [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f\colon [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x)\,.$$

Então,

(i) f é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente) crescente, portanto é *bi-contínua.*

(ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função f é mensurável e

$$\mathrm{m}(f(\mathcal{C})) = 1\,.$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

(iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}\,.$$

Então E é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

Proposição 2. *Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:*

(i) A família de conjuntos abertos.
(ii) A família de conjuntos fechados.
(iii) A família de conjuntos compactos.
(iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).
(v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).

Demonstração. Exercício. □

Medidas abstratas

Definição 4. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função

$$\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

é chamada de *medida* (σ-aditiva) em $(X, \mathcal{B})$ se

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ e
(ii) para toda coleção mensurável de conjuntos mensuráveis *disjuntos* $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo em um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre X e uma medida μ em $(X, \mathcal{B})$ é chamada de *espaço de medida.*

Em seguida apresentamos alguns exemplos de espaços de medida.

Exemplo 3. O espaço da medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$. A medida m é também referida como a medida de volume.

Um outro exemplo comum é o espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ da medida de Borel, ou seja, o espaço de Borel munido com a restrição da medida de volume.

Exemplo 4. A medida trivial em $(X, \mathcal{B})$: $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

Exemplo 5 (a medida de Dirac)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável qualquer e seja $x \in X$ um ponto. A medida de Dirac com centro em x é dada por

$$\delta_x\colon \mathcal{B} \to [0, \infty), \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases} = \mathbf{1}_E(x)\,.$$

Note que a função δ_x é, de fato, uma medida:

(i) $\delta_x(\varnothing) = \mathbf{1}_\varnothing(x) = 0$.
(ii) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned}\delta_x\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) &= \mathbf{1}_{\bigsqcup_{n\geq 1} E_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)\,.\end{aligned}$$

Exemplo 6 (soma de medidas de Dirac ou de pontos de massa)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Dados pontos $x_1, \ldots, x_k \in X$ e números $c_1, \ldots, c_k \in [0, \infty]$, seja

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i\, \delta_{x_i}\,.$$

Então μ é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício) chamada de soma de medidas de Dirac com massa concentrada em $x_1, \ldots, x_k$ e pesos $c_1, \ldots, c_k$.

A ideia é que além do volume (ou área, ou comprimento), a massa de um objeto também pode ser considerada como uma medida. Uma soma de medidas de Dirac corresponde ao caso de uma coleção *discreta* de centros de massa.

Exemplo 7. Mais geralmente, dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ de medidas em $(X, \mathcal{B})$ e uma sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de números não negativos,

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mu_n$$

é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício).

Exemplo 8 (medida de contagem)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. A medida de contagem é a função $\#\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\#(E) =$ a cardinalidade de E se E for finito e $\#(E) = \infty$ se E for um conjunto infinito.

Em seguida listamos algumas propriedades básicas de uma medida. Começamos com uma notação útil.

Notação. Dada uma sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos, usamos as seguintes notações:

- $E_n \nearrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n+1}$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$.
- $E_n \searrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$.

Proposição 3. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) (monotonicidade) Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(ii) (σ-subaditividade) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

(iii) (convergência monótona para conjuntos) Sejam $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{B}$.

- *Se $E_n \nearrow E$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*
- *Se $E_n \searrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. O argumento é idêntico ao da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e é deixado com exercício. $\square$

Da mesma forma que no caso da medida de Lebesgue, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 5. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é chamado *μ-negligenciável*, ou de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Uma propriedade $P(x)$ é válida para quase todo ponto $x \in X$ com respeito à medida μ, ou, de uma forma mais concisa, dizemos que $P(x)$ vale para μ-q.t.p. $x \in X$ se o conjunto

$$\{x \in X \colon P(x) \text{ não é válida}\}$$

é $\mathcal{B}$-mensurável e de medida nula.

Observação 3. Em geral, um subconjunto de um conjunto negligenciável *não* e necessariamente mensurável. Por exemplo, considerando o espaço da medida de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{m})$, o conjunto $E \subset \mathcal{C}$ do Exercício 1 não é boreliano, embora o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ seja boreliano e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

Esta observação motiva a seguinte definição.

Definição 6. Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dito *completo* se todo conjunto de um conjunto μ-negligenciável é mensurável, ou seja,

$$\text{se } E \in \mathcal{B},\ \mu(E) = 0 \text{ e } F \subset E \text{ então } F \in \mathcal{B}\,.$$

Por exemplo, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ é completo, mas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ não é completo.