# AULA 17B: FUNÇÕES MENSURÁVEIS

**Definição 1.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f\colon X \to [0, \infty]$ é dita $\mathcal{B}$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) se para todo conjunto *aberto* $U \subset [0, \infty]$, temos

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U) \in \mathcal{B},$$

ou seja, se para todo aberto $U$, $\{f \in U\}$ é mensurável.

Similarmente, uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $\{f \in U\} \in \mathcal{B}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

**Observação 1.** Um conjunto $E \in \mathcal{B}$ se e somente se sua função indicadora $\mathbf{1}_E$ é mensurável.

De fato, como $E = \{\mathbf{1}_E \in (0, 2)\}$, se $1_E$ é mensurável, segue que $E \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, supondo que $E$ seja mensurável e dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, como

$$\{\mathbf{1}_E \in U\} = \begin{cases} X & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \in U \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \notin U \\ E & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \in U \\ E^{\complement} & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \notin U, \end{cases}$$

segue que $\{\mathbf{1}_E \in U\} \in \mathcal{B}$, monstrando a mensurabilidade de $\mathbf{1}_E$.

**Proposição 1.** *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então para todo conjunto* boreliano *$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\{f \in E\} \in \mathcal{B}.$$

*Demonstração.* Utilizamos o mecanismo padrão para conjuntos. Seja

$$\mathcal{A} := \big\{\mathbb{E} \subset \mathbb{R} \colon \{f \in E\} \text{ é mensurável}\big\}.$$

Como a função $f$ é mensurável, segue que $U \in \mathcal{A}$ para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra. De fato,

- $\{f \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $\{f \in E\} \in \mathcal{B}$, e daí,

$$\{f \in E^{\complement}\} = \{f \in E\}^{\complement} \in \mathcal{B},$$

portanto $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.

- Se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ então $\{f \in E_n\} \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$. Como

$$\Big\{f \in \bigcup_{n \geq 1} E_n\Big\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \in E_n\} \in \mathcal{B},$$

segue que $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

Concluímos que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, já que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a menor $\sigma$-álgebra contendo os conjuntos abertos. □

**Observação 2.** Em geral *não* é verdadeiro que dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função mensurável $f\colon X \to \mathbb{R}$ e um conjunto (apenas) *Lebesgue* mensurável $S \subset \mathbb{R}$,

$$\{f \in S\} \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, considere a função do Exercício da aula passada, $f\colon [0, 1] \to [0, 2]$, $f(x) = x + c(x)$, onde $c$ é a função de Cantor.

Seja $g\colon [0,2] \to [0,1]$ a inversa de $f$ e note que $g$ é mensurável pois é contínua. Considere, como no mesmo Exercício da aula passada, um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$ e seja

$$E := g(\mathcal{N}) = f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}.$$

Então $E$ é Lebesgue mensurável, enquanto $\mathcal{N} = g^{-1}(E)$ não é Lebesgue mensurável.

**Definição 2.** Dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$, uma função $f\colon X \to Y$ é chamada de mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X$ para todo $E \in \mathcal{B}_Y$.

**Observação 3.** Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ e uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, o contradomínio $\mathbb{R}$ é a priori munido com a $\sigma$-álgebra de Borel (em vez da Lebesgue). Desta forma, a noção de mensurabilidade da função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é consistente com o conceito mais geral introduzido acima.

**Definição 3.** Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função $s\colon X \to [0, \infty]$ é chamada de função *simples sem sinal* se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

para alguns números $c_i \in [0, \infty]$ e conjuntos $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in [k]$.

Similarmente, $s\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função *simples* (com sinal) se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

onde $c_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in [k]$.

**Observação 4.** Toda função simples é mensurável. De fato, se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, então dado qualquer aberto $U$ (em $[0, \infty]$ ou $\mathbb{R}$),

$$\{s \in U\} = \bigcup \big\{E_i \colon c_i \in U, i \in [k]\big\},$$

então $\{s \in U\} \in \mathcal{B}$.

Além disso, note que somas e produtos de funções simples são funções simples também.

Os seguintes resultados básicos sobre funções mensuráveis $f\colon (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ são análogos aos resultados correspondentes sobre funções mensuráveis à Lebesgue $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As demonstrações deles também são idênticas às demonstrações no contexto euclidiano; por isso, omitiremos os detalhes técnicos das provas.

**Teorema 1.** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

*(1) Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ (ou $[0, \infty]$) é mensurável se e somente se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\} \in \mathcal{B}$. Isto também é equivalente a $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ (ou $\{f < \lambda\} \in \mathcal{B}$, ou $\{f \leq \lambda\} \in \mathcal{B}$) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*(2) Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis, onde $f^+, f^-\colon X \to [0, \infty)$,*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \text{ e}$$
$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

*(3) Se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em todo ponto, então o limite $f$ é mensurável.*

*(4) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.*

*Demonstração.* (1) O conjunto $\{f > \lambda\} = f^{-1}(\lambda, \infty)$ e $(\lambda, \infty)$ é aberto, portanto a implicação indireta segue.

Para justificar a implicação direta, note que todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos: $U = \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n)$. Como

$$\{f \in U\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f \in (a_n, b_n)\},$$

basta provar que $\{f \in (a, b)\} \in \mathcal{B}$ para todo intervalo $(a, b)$. Mas

$$\{f \in (a, b)\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}\,.$$

Além disso,

$$\{f < b\} = \{f \geq b\}^{\complement} = \Big\{ \bigcap_{n\geq 1} \{f > b - \frac{1}{n}\}\Big\}^{\complement}$$

que pertence a $\mathcal{B}$. Logo, $\{f \in (a, b)\} \in \mathcal{B}$.

(2) A equivalência é uma consequência das seguintes identidades: para todo $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\{f^+ > \lambda\} &= \{f > \lambda\},\\
\{f^- > \lambda\} &= \{-f > \lambda\} = \{f < -\lambda\},\\
\{f = 0\} &= \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}.
\end{aligned}$$

(3) Não é difícil verificar que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) > \lambda \;\text{ sse }\; \exists m \geq 1\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N\ f_n(x) > \lambda + \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \{f_n > \lambda + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{B}.$$

(4) Se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, como $\phi$ é contínua, $\{\phi \in U\} = \phi^{-1}(U)$ é aberto. Portanto,

$$\{\phi \circ f \in U\} = (\phi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\phi^{-1}(U))$$

é mensurável. □

**Teorema 2.** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

*(1) Uma função $f \colon X \to [0, \infty]$ é mensurável se e somente se existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinal e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

*(2) Uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples (com sinal) e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

*Demonstração.* As implicações indiretas são consequências do Teorema 1 (3) e da Observação 4 (que toda função simples é mensurável).

A construção de uma sequência monótona de funções simples que convergem para $f$ é idêntica a do caso da integral de Lebesgue no espaço euclidiano. De fato, dada $f \colon X \to [0, \infty]$ mensurável, para todo $n \geq 1$ seja

$$s_n := n\,\mathbf{1}_{\{f\geq n\}} + \sum_{j=0}^{n\,2^n-1} \frac{j}{2^n}\,\mathbf{1}_{\left\{f\in\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right\}}\,.$$

Não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Além disso, se $f(x) = \infty$, então para todo $n \geq 1$, $s(x) = n \to \infty = f(x)$, enquanto se $f(x) < \infty$, para todo $n > f(x)$ tem-se

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

logo $s_n(x) \to f(x)$.

Finalmente, dada uma função mensurável com sinal $f\colon X \to \mathbb{R}$, como $f^+, f^-$ são funções mensuráveis sem sinal, pelo argumento acima, existem sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f^+$ e $\sigma_n \to f^-$ em todo ponto. Portanto, para todo $n \geq 1$, a função $s_n - \sigma_n$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- \,.$$

□

**Teorema 3.** *Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. Então $f+g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis também.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, existem duas sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então para todo $n \geq 1$, as funções $s_n + \sigma_n$ e $s_n \cdot \sigma_n$ são simples e evidentemente,

$$s_n + \sigma_n \to f + g, \; s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g,$$

mostrando, via Teorema 2, que $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis. □