AULA 18: A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO MENSURÁVEL

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em X segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja $s\colon X \to [0, \infty]$,

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mu(E_i).$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se s possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j_1}^{l} d_j \, \mathbf{1}_{F_j},$$

então

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_i) = \sum_{j_1}^{l} d_j \mu(F_j),$$

A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja $s\colon X \to \mathbb{R}$ uma função simples. Então, já que s pode ser representada como

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i}$$

onde os conjuntos mensuráveis $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos, segue que

$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{\pm} \, \mathbf{1}_{E_i} \text{ e } |s| = \sum_{i=1}^{k} |c_i| \, \mathbf{1}_{E_i}$$

Portanto, s^+, s^-, $|s|$ são funções simples sem sinais.

A função s é dita absolutamente integrável se

$$\int_X |s| \; d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos

$$\int_X s \, d\mu := \int_X s^+ \, d\mu - \int_X s^- \, d\mu.$$

(3) Seja $f\colon X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \le s \le f, \; s \text{ é simples} \right\}.$$

Não é dificil ver que

$$\int_X f\, d\mu := \sup \left\{ \int_X s\, d\mu \colon 0 \le s \le f,\ s \text{ é simples e finita} \right\},$$

e, de fato, outras restrições sobre s podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em $\mathbb{R}^d$, s pode ser escolhida com suporte compacto).

(4) Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, como f é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que f^+, f^- e $|f|$ também são tais limites, logo são mensuráveis também.
Chamamos f de absolutamente integravel se

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty$$

Neste caso,

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

Teorema 1. *(propriedades básicas da integral)*
Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g \colon X \to [0, \infty]$ (ou $f, g \colon X \to \mathbb{R}$) duas funções mensuráveis (ou, respectivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:

(1) (monotonicidade e equivalência)
Se $f \le g$ em μ-q.t.p então $\int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$.
Se $f = g$ em μ-q.t.p então $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

(2) (linearidade)

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$
$$\int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu\,.$$

(3) (divisibilidade)
Se $E \in \mathcal{B}$ então $f\, \mathbf{1}_E$ e $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis e

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, \mathbf{1}_E\, d\mu + \int_X f\, \mathbf{1}_{E^\complement}\, d\mu\,.$$

Denotado por

$$\int_E f\, d\mu := \int_X f\, \mathbf{1}_E$$

temos

$$\int_X f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_{E^\complement} f\, d\mu\,.$$

(4) (a desigualdade de Markov)
Se $f \colon X \to [0, \infty]$, para todo $\lambda > 0$ tem-se

$$\mu\,\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int_X f\, d\mu}{\lambda}\,.$$

(5)

$$\int_X |f| \, d\mu = 0 \quad sse \quad f = 0 \ \mu - q.t.p.$$

$$Se \int_X |f| \, d\mu < \infty \ então \ |f| < \infty \ \mu - q.t.p.$$

Demonstração. O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Desrevemos os passos principais.

(1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição
A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.

(2) De novo, o primeiro passo é provar linearidade da integral para funções simples.
O caso geral segue-se do teorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.

(3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto, $f\mathbf{1}_E$ e $f\mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis.
Como

$$f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{E^\complement},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

(4) Como $f \geq \lambda \, \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}}$, a desigualdade de Markov é consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f \, d\mu \geq \int_X \lambda \, \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}} \, d\mu = \lambda \, \mu \, \{f \geq \lambda\} \, ,$$

Logo

$$\mu \, \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda} \, .$$

(5) Claramente

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\} .$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu \, \{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

Logo $\mu \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\} = 0$ para todo $n \geq 1$. Concluímos que $\mu \, \{f \neq 0\} = 0$, ou seja, $f = 0$ μ-q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$,

$$\mu \, \{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{n} \to 0$$

pois $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos $\{|f| \geq n\}_{n\geq 1}$ é não crescente, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu \, \{|f| = \infty\} \, = \, \lim_{n\to\infty} \mu \, \{|f| \geq n\} = 0.$$

$\square$

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f| \, d\mu \, < \, \infty \right\}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integraveis em X.

De fato, se $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f + g$ é mensurável (pois f e g são mensuráveis) e como

$$|f + g| \, \leq \, |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f + g| \, d\mu \, \leq \, \int_X |f| \, d\mu \, + \, \int_X |g| \, d\mu \, < \, \infty,$$

logo $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$ então cf é mensurável e

$$\int_X |cf| \, d\mu \, = \, |c| \int_X |f| \, d\mu \, < \, \infty,$$

então $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Definimos o espaço L^1 por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)/\sim$$

onde $f \sim g$ se $f = g$ em μ-q.t.p.

Como pelo Teorema 1 (5), dada uma função $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X |f| \, d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \ \mu - \text{q.t.p.}$$

acontece que

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$$

é uma norma em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Então, $(L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \, , \, \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são $L^1(X)$, $L^1(d\mu)$, $L^1(X, \mu)$ e etc.

Ademais, dado um número real $1 \leq p < \infty$,

Seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

módulo igualdade q.t.p.

Munido com

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$\left(L^p(X, \mathcal{B}, \mu) \, , \, \|\cdot\|_p \right)$ também é um espaço normado. Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções L^p.

Teorema 2. *(a desigualdade de Chebyshev) Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Demonstração. Aplicamos a desigualdade de Markov à função $|f|^p$.

Primeiro, como $f \colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|^p$ é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \geq \lambda \Leftrightarrow |f|^p \geq \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\} \leq \frac{\int_X |f|^p \, d\mu}{\lambda^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

□