Aula 23 Modos de convergência

Dados um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ uma sequência de funções mensuráveis

$$f_n : X \to \mathbb{R}, \quad n \geq 1$$

e uma outra função mensurável

$$f : X \to \mathbb{R},$$

$\{f_n\}_{n \geq 1}$ pode convergir para f de maneiras diferentes.

① Convergência pontual

(a) em todo ponto

$f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.

(b) em μ-qtp: existe $W \in \mathcal{B}$, $\mu(W) = 0$

t.q. $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in W^c$.

② Convergência uniforme

(a) no espaço inteiro: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$

t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$\forall n \geq N_\varepsilon$.

(b) Convergência essencialmente uniforme. (ou com respeito à norma L^∞).

<u>Definição</u> Uma função mensurável $f: X \to \mathbb{R}$ é dita <u>essencialmente limitada</u> se existir $C < \infty$ t.q.

$$|f(x)| \leq C \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

Neste caso, seja

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}(f)$$

$$:= \inf \{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \ \mu\text{-q.t.p. } x \in X\}.$$

<u>Obs</u> $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\substack{W \in \mathcal{B} \\ \mu(W)=0}} \sup\{f(x) : x \in W^c\}.$

O espaço

$$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ mensurável, e essencialmente limitada}\}$$

(módulo igualdade em μ-q.t.p.).

<u>Proposição</u> $\left(L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_\infty\right)$ é um espaço normado.

Demonstração

Se $\|f\|_\infty = 0$ então $f = 0$ μ-qtp.

não é completamente trivial.

Definição $f_n \to f$ essencialmente uniformemente

se $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$,

ou seja, se

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f.$$

Observação. $f_n \to f$ em L^∞ sse

para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ N_ε t. q.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para μ-qtp $x \in X$.

(c) Convergência quase uniforme

<u>Definição</u> $f_n \to f$ quase uniformemente

Se para todo $\varepsilon > 0$ existe $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E^c) < \varepsilon$ t. q.

$f_n \to f$ uniformemente em E.

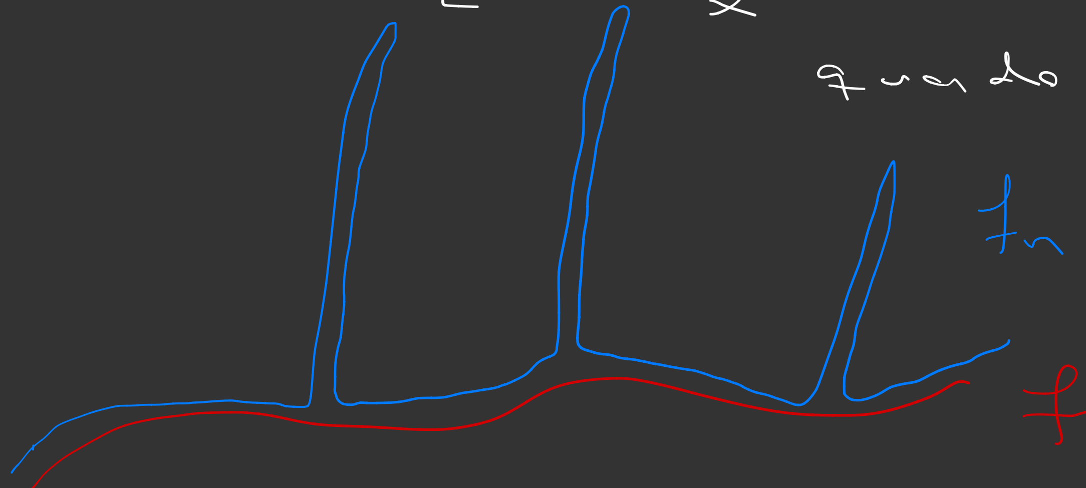
③ <u>Convergência em média</u>

(a) com respeito à norma L^1.

$f_n \to f$ em L^1:

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

quando $n \to \infty$.



(b) com respeito à norma L^p, $1 \le p < \infty$

$f_n \to f$ em L^p:

$$\|f_n - f\|_{L^p}^p = \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \to 0$$

quando $n \to \infty$.

④ Convergência em medida

$f_n \to f$ em medida se $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

onde

$$\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{B}.$$

Observação Todos os modos de convergência definidos acima (exceito por convergência pontual em todo ponto, e uniforme no espaço inteiro) não dependem de conjuntos de medida zero.

Teorema Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis, $f: X \to \mathbb{R}$ uma outra função mensurável.

(i) Se $f_n \to f$ em L^∞ então $f_n \to f$ em medida.

(ii) Se $f_n \to f$ em L^∞ então $f_n \to f$ em μ-qtp

(iii) Se $f_n \to f$ em L^∞ então $f_n \to f$ quase uniformemente.

(iv) Se $f_n \to f$ em L^p $(1 \leq p < \infty)$ então $f_n \to f$ em medida.

Observação Em geral,

$$f_n \to f \text{ em } L^\infty \not\Rightarrow f_n \to f \text{ em } L^1$$

Ex Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abs. integrável e $f_n := f + \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$. Então,

$|f_n - f| = \frac{1}{n} \to 0$, logo $f_n \to f$ uniformemente.

Mas $\|f_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, dm = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \, dm = \infty$

Observação Em geral,

$f_n \to f$ em μ-qtp $\not\Rightarrow f_n \to f$ em medida.

Por exemplo, em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, a sequência $1_{[n,\infty)} \longrightarrow 0$ em todo ponto.

Mas

$$\{ |1_{[n,\infty)} - 0| > \varepsilon \} =$$

$\varepsilon \in (0,1)$

$$= \{ 1_{[n,\infty)} > \varepsilon \}$$

$$= [n,\infty)$$

$$\mu[n,\infty) = \infty \Rightarrow \not\to 0.$$

Então, $1_{[n,\infty)} \not\to 0$ em medida.

Demonstração (do teorema) Vamos seguir o seguinte caminho

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{f_n \to f \text{ em } L^\infty} \arrow[d, Leftrightarrow, "(1)"] & \boxed{f_n \to f \quad \mu\text{-qtp}} \\
\begin{array}{l}\text{existe } S \in \mathcal{B} \text{ com } \mu(S^c) = 0 \\ \text{t.q. } f_n \to f \text{ unif. em } S\end{array} \arrow[ur, Rightarrow, "(2)"] \arrow[r, Rightarrow, "(4)"] \arrow[d, Rightarrow, "(3)"] & \begin{array}{l} f_n \to f \\ \text{quase unif.}\end{array} \\
\boxed{f_n \to f \text{ em medida}} &
\end{tikzcd}
$$

(1) $f_n \to f$ em L^∞ : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.q.
$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$.

Portanto, existe $W_\varepsilon \in \mathcal{B}$, $\mu(W_\varepsilon) = 0$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in W_\varepsilon^c$.

Definimos

$$W = \bigcup_{k \geq 1} W_{1/k} \in \mathcal{B}, \quad \mu(W) = 0$$

$$S = W^c = \bigcap_{k \geq 1} W_{1/k}^c .$$

Então $\mu(S^c) = 0$

Vamos provar que

$$f_n \to f \text{ uniformemente em } S.$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Existe $K \geq 1$ t.q. $\frac{1}{K} < \varepsilon$.

Temos que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{K} < \varepsilon$$

para todo $x \in S$ $\forall n \geq M_{1/K}$

porque $S \subset W_{1/K}^c$.

Concluímos que $f_n \to f$ unif. em S.

(2) Evidente.

(3) Seja $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ unif. em S existe N_ε t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in S$, para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Então, $\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subset S^c$

para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Logo

$$\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \leq \mu(S^c) = 0$$

(4) Óbvio.

Falta provar que

$$f_n \to f \text{ em } L^p \Rightarrow f_n \to f \text{ em medida.}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Pela desigualdade de Chebyshev,

$$\mu\left\{ |f_n - f| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0$$

porque $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. $\boxed{///}$