Aula 24 Modos de convergência: caso especial de medida finita

(em particular, medida de probabilidade)

Teorema Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, i.e. $\mu(X) < \infty$. Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis e $f: X \to \mathbb{R}$ uma outra função mensurável.

Se $f_n \to f$ em L^∞ então $f_n \to f$ em L^p para todo $1 \leq p < \infty$.

prova Como $f_n \to f$ em L^∞, existe $S \in \mathcal{B}$, $\mu(S^c) = 0$ tal que

$f_n \to f$ uniformemente em S.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe N_ε tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para toda } n \geq N_\varepsilon \text{ para todo } x \in S.$$

Então, para todo $n \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = \int_S |f_n - f|^p \, d\mu \quad (\text{já que } \mu(S^c) = 0)$$

$$\leq \int_S \varepsilon^p \, d\mu = \varepsilon^p \mu(S) = \varepsilon^p \mu(X).$$

Portanto,

$$\|f_n - f\|_p^p \leq \varepsilon^p \mu(X)$$

e como $\mu(X) < \infty$, concluímos que

$$f_n \to f \text{ em } L^p. \qquad \boxed{///}$$

<u>Teorema</u> Dados $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) < \infty$, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ e f mensuráveis, se $f_n \to f$ μ-qtp então $f_n \to f$ em medida.

<u>Prova</u> Seja $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ μ-qtp, existe $W \in \mathcal{B}$, $\mu(W)$ t.q.

$$f_n(x) \to f(x) \text{ para todo } x \in W^c.$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathcal{A}_N := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq N\}.$$

Então, $\mathcal{A}_N \nearrow W^c$ quando $N \to \infty$.

$$\Rightarrow \mathcal{A}_N^c \searrow W \text{ quando } N \to \infty.$$

O teorema de convergência monótona (para baixo) é aplicável, já que $\mu(X) < \infty$, e implica:

$$\mu(A_M^c) \to \mu(\emptyset) = 0$$

Claramente,

$$\{x \in X : |f_M(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset A_M^c,$$

logo,

$$\mu\{|f_M - f| \geq \varepsilon\} \leq \mu(A_M^c) \to 0,$$

provando que $f_M \to f$ em medida.

$\boxed{//}$

Teorema (de Egorov) Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita. Sejam $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis e f uma outra função mensurável.

$$f_n \to f \text{ em } \mu\text{-q.t.p.} \quad \text{sse} \quad f_n \to f \; \boxed{\text{quase}} \text{ uniformemente.}$$

Prova. "$\Rightarrow$": Como $f_n \to f$ em μ-q.t.p., existe $W \in \mathcal{B}$, $\mu(W) = 0$ tal que

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in W^c.$$

Logo, para todo $x \in W^c$ e para todo $m \geq 1$ existe $N(x, m) \in \mathbb{N}$ t.q.

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \qquad \forall n \geq N(x, m).$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$, seja

$$G_{m,N} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \text{ para todo } n \geq N\}.$$

Fixe $m \geq 1$. Então, $G_{m,N} \nearrow W^c$ quando $N \to \infty$.

Logo, $G^c_{m,N} \searrow W$ quando $N \to \infty$.

Pelo TCM para conjuntos (aplicável, já que $\mu(X) < \infty$) temos que

$$\mu(G^c_{m,N}) \longrightarrow \mu(W) = 0 \quad \text{quando } N \to \infty.$$

Fixe $\delta > 0$. Para cada $m \geq 1$ existe N_m t.q.

$$\mu(G^c_{m,N_m}) < \frac{\delta}{2^m}. \qquad G^c_{m,N} \cap [-m,m]^d$$

Seja $F_\delta := \bigcup_{m=1}^{\infty} G^c_{m,N_m}$.

Então, $F_\delta \in \mathcal{B}$ e $\mu(F_\delta) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$.

Escolhendo $E_\delta := F_\delta^c$, temos que $\mu(E_\delta^c) \leq \delta$

e $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em E_δ.

De fato, se $x \in E_\delta = \bigcap_{m \geq 1} G_{m,N_m}$, então, para todo $m \geq 1$, $x \in G_{m,N_m}$, ou seja,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \qquad \forall\, n \geq N_m.$$

Provamos que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \qquad \forall\, n \geq N_m, \ \forall\, x \in E_\delta,$$

logo, $f_n \to f$ uniformemente em E_δ.

"$\Longleftarrow$": Como $f_n \to f$ quase uniformemente, para todo $\delta > 0$ existe F_δ, $\mu(F_\delta) < \delta$ t.q.

$$f_n \to f \text{ uniformemente em } F_\delta^c$$

logo, $f_n \to f$ pontualmente em F_δ^c.

Segue que

$$\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\} \subset F_\delta.$$

Portanto,

$$\mu\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\} \leq \mu(F_\delta) \leq \delta \to 0;$$

ou seja, $f_n \to f$ μ-qtp. $\blacksquare$

Definição Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dito σ-finito se existir uma sequência de conjuntos de medida finita $\{E_n\}_{n\geq 1}$ t.q.

$$X = \bigcup_{n\geq 1} E_n .$$

$F_n = \bigcup_{m=1}^{n} E_m$

$F_n \nearrow X$, $\mu(F_n) < \infty$

Exemplo O espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ é σ-finito.

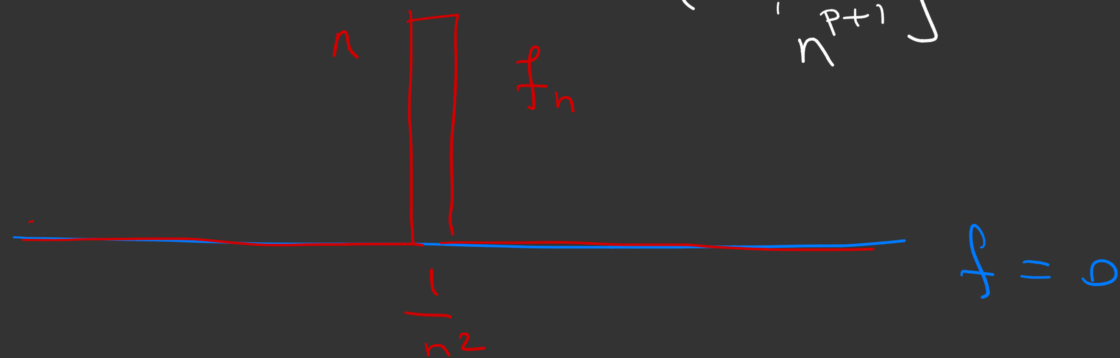
Teorema (Egorov) Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ for σ-finito e $f_n \to f$ μ-qtp, então $f_n \to f$ quase uniformemente.

prova (exercício).

Observação 1 Convergência em L^p NÃO implica (em geral) convergência em L^∞. Por exemplo

($1 \le p < \infty$)

$$f_n := n \, \mathbb{1}_{\left(0, \frac{1}{n^{p+1}}\right]} \longrightarrow 0 \text{ em } L^1$$



$$\|f_n - 0\|_p^p = \|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p = n^p \cdot \frac{1}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \inf_{\substack{S \in \mathcal{B} \\ \mu(S^c) = 0}} \sup_{x \in S} |f_n(x)| = n \to \infty .$$

Dado qualquer $S \in \mathcal{B}$, $\mu(S^c) = 0$, $S \cap \left(0, \frac{1}{n^2}\right] \neq \emptyset$

$f_n \ge 1$

já que $m\left(0, \frac{1}{n^2}\right] > 0$.

Observação 2 Convergência em q-qtp NÃO implica (em geral), convergência em L^1 (ou em L^p, $1 \leq p < \infty$).

Por exemplo
$$f_n := n \, 1_{(0, \frac{1}{\sqrt{n}}]} \longrightarrow 0$$
em todo ponto.

$$\|f_n - 0\|_{L^1} = \int f_n \, dm = n \cdot m\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow \infty.$$

Este exemplo também mostra que convergência em medida não implica convergência em L^1.

De fato, dado $\varepsilon \in (0,1)$,
$$\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{f_n \geq \varepsilon\} = \{f_n \neq 0\} = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
Logo, $m\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \Rightarrow f_n \to 0$ em medida.

Observação 3. Convergência em medida não implica convergência q.t.p. Por exemplo, considere o espaço $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$. Considere a seguinte enumeração $\{I_n\}_{n\geq 1}$ dos intervalos

$$[0,1], \left[0, \tfrac{1}{2}\right), \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \left[0, \tfrac{1}{3}\right), \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \left[\tfrac{2}{3}, 1\right], \ldots$$

$$I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4 \quad \ldots$$

Sejam $f_n := 1_{I_n}$ para todo $n \geq 1$.

Então $f_n \to 0$ em medida. De fato,

$$\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{f_n \neq 0\} = I_n$$

$$m\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} = m(I_n) \to 0.$$

Por outro lado, $f_n(x) \not\to 0$ para todo $x \in [0,1]$.

De fato, para todo $x \in [0,1]$ existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ t.q. $f_{n_k}(x) = 1 \ \forall k$ e existe uma subsequência $\{f_{m_\ell}\}$ t.q. $f_{m_\ell}(x) = 0 \ \forall \ell$.

Teorema Se $f_n \to f$ em medida, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que

$$f_{n_k} \longrightarrow f \quad \text{em } \mu\text{-qtp.}$$

prova: exercício.

Observação 4 Convergência em L^1 (que é mais forte do que convergência em medida) não implica convergência qtp (veja o exemplo anterior:

$$\|f_n - 0\|_1 = \int f_n = \int 1_{I_n} = m(I_n) \to 0).$$