Construção abstrata de medidas

Lembre-se a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$:

- consideramos caixas (ou conjuntos elementares) para as quais já temos uma medida natural (o volume):

$$m(B) = |B|$$

$$m(B_1 \sqcup \dots \sqcup B_N) = \sum_{i=1}^{N} |B_i| .$$

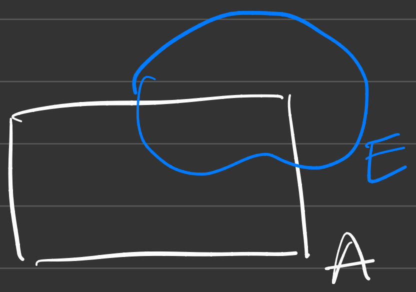
"pre-medida em $\mathbb{R}^d$".

- definimos um conceito mais primitivo de medida: "a medida exterior" de Lebesgue.

Se $E \subset \mathbb{R}^d$

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \ B_k \text{ são caixas ou conjuntos elementares} \right\}.$$

- definimos "conjuntos mensuráveis" via o primeiro princípio de Littlewood, que é equivalente ao princípio de Carathéodory:



$E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável sse $\forall A \subset \mathbb{R}^d$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Neste caso, $m(E) := m^*(E)$.

Medida exterior e o teorema de extensão de Carathéodory.

Definição Dado um conjunto X, uma função

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty] \text{ é}$$

chamada de medida exterior se

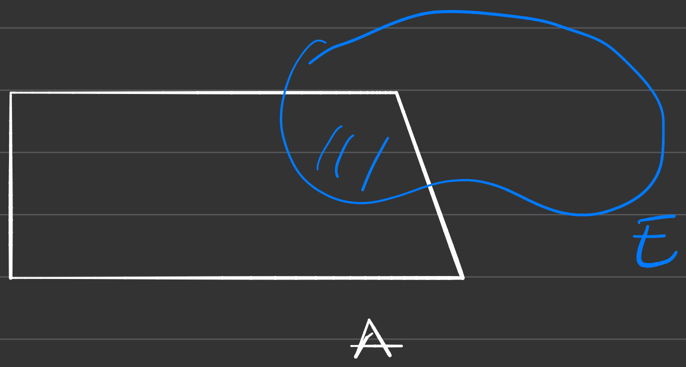
(1) $\mu^*(\phi) = 0$

(2) Se $E \subset F$ então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

(3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Ex m^*, a medida exterior de Lebesgue é uma medida exterior.

Definição Seja μ^* uma medida exterior em X. Um conjunto $E \subset X$ é chamado mensurável (à Carathéodory) com respeito a μ^* se para todo $A \subset X$, temos



$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Observação Por causa da subaditividade de μ^*, $E \subset X$ é mensurável sse

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Observação Se $\mu^*(E) = 0$ então E é mensurável.

<u>Teorema</u> (de extensão de Carathéodory)

Seja μ^* uma medida exterior em X, e

Seja $$\mathcal{B} := \{ E \subset X : E \text{ mensurável à Carathéodory} \}.$$

Então,

(i) $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra

(ii) $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\mu(E) := \mu^*(E)$ é uma medida.

Portanto, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida.

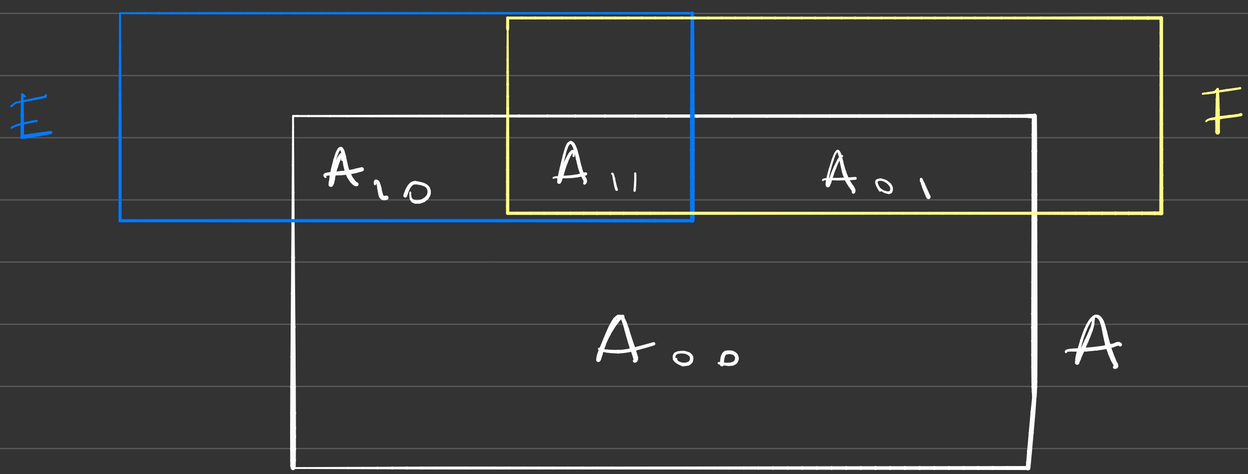
__prova__ (i) Evidentemente $\emptyset \in \mathcal{B}$, e como

$(E^c)^c = E$, temos que $E \in \mathcal{B} \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}$.

- Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Vamos provar que $E \cup F \in \mathcal{B}$,

ou seja, que dado $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) \quad (1)$$



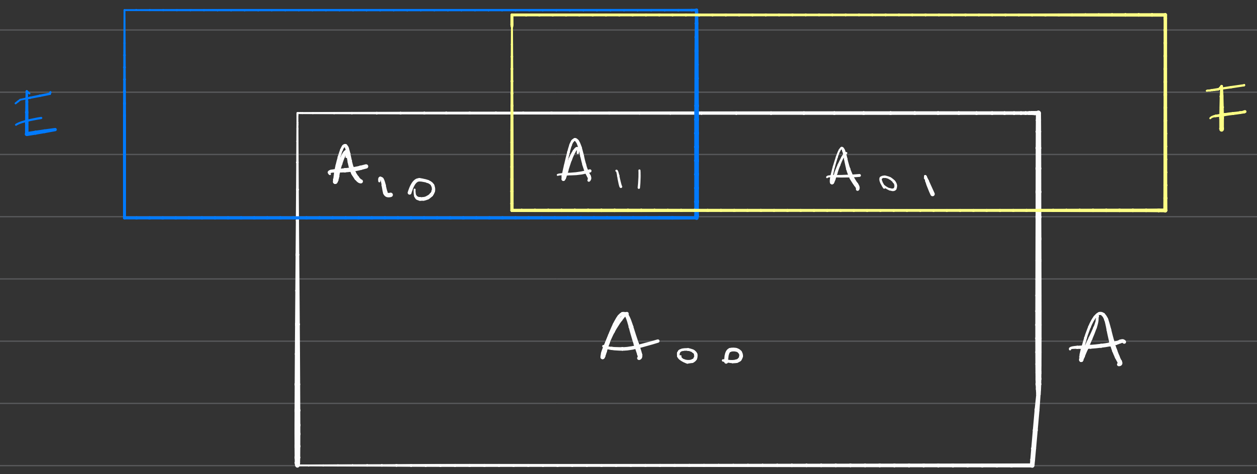
Sejam

$A_{00} := A \cap (E \cup F)^c = A \cap E^c \cap F^c$

$A_{10} := (A \setminus F) \cap E = A \cap E \cap F^c$

$A_{01} := (A \setminus E) \cap F = A \cap E^c \cap F$

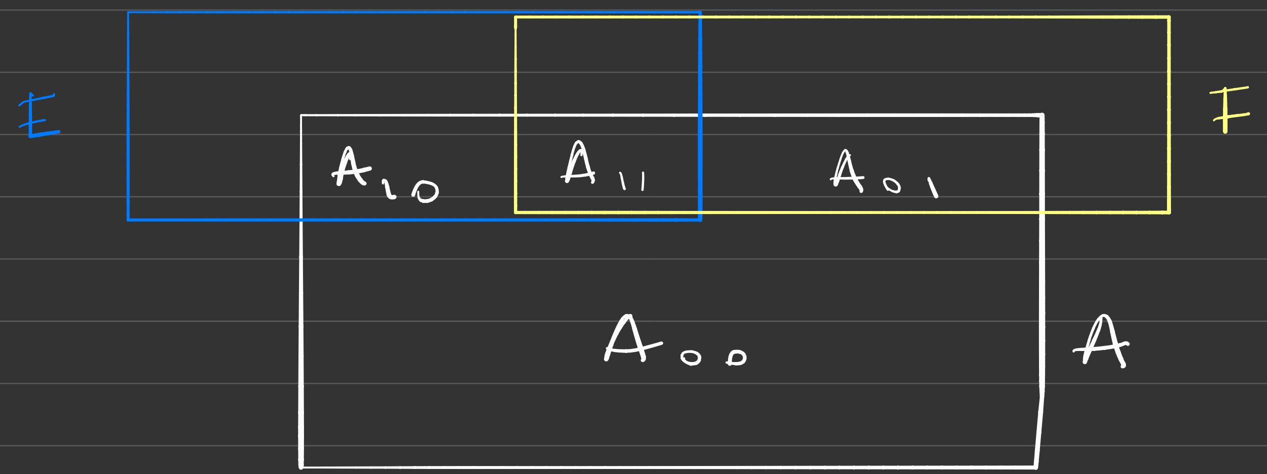
$$A_{11} := A \cap E \cap F$$



(1) é equivalente ao seguinte:

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \tag{2}$$

$$= \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{00})$$

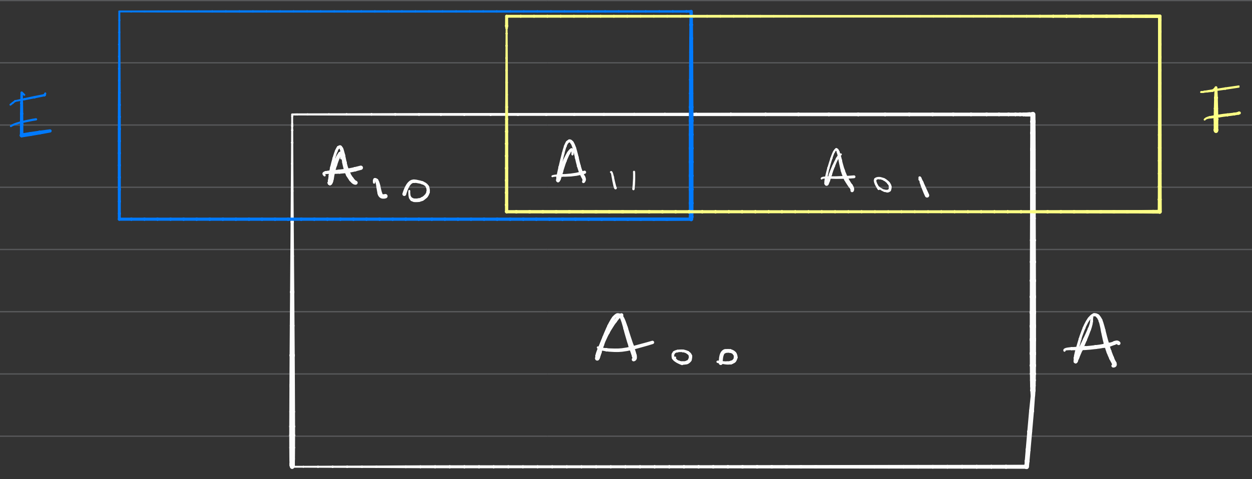


Como $E \in \mathcal{B}$, temos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

$$\Longleftrightarrow \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \quad (3)$$

$$= \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01})$$

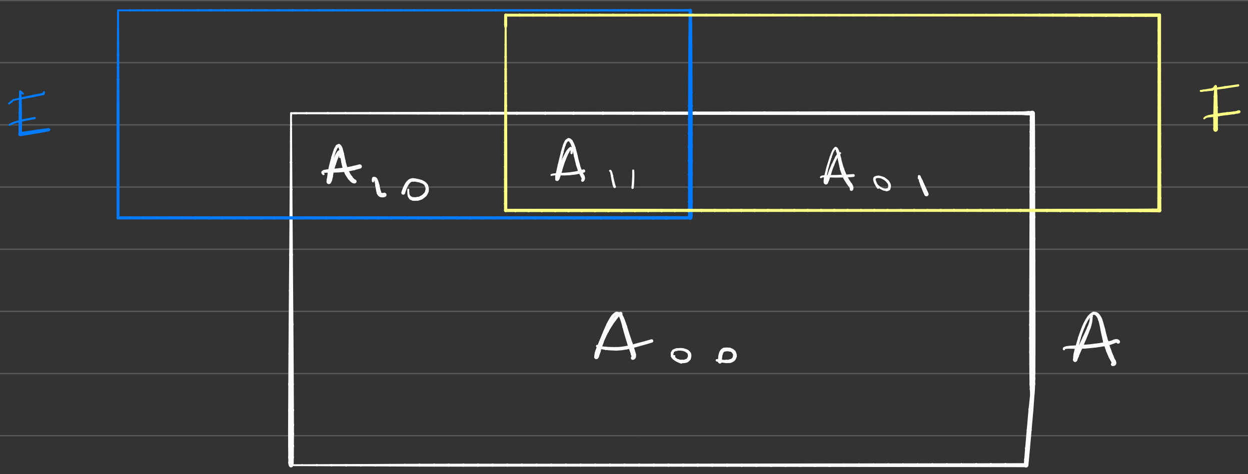


De novo, usando o fato que $E \in \mathcal{B}$,

$$\mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E)$$

$$+ \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E^c)$$

$$= \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01}) \qquad (4)$$



Como $F \in \mathcal{B}$, temos que

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cap F)$$

$$+ \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \setminus F)$$

$$= \mu^*(A_{01}) + \mu^*(A_{00}) \quad (5).$$

E simples ver que (3) + (4) + (5) $\Rightarrow$ (2).

De fato,

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) \overset{(3)}{=} \mu^*(A_{11} \cup A_{10}) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01})$$

$$\overset{(4)}{=} \left(\mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \mu^*(A_{01})\right) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01})$$

$$\overset{(5)}{=} \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \cancel{\mu^*(A_{01})} + \mu^*(A_{00}) + \cancel{\mu^*(A_{01})}$$

$$= \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{00}),$$

mostrando que $E \cup F \in \mathcal{B}$.

Por indução, se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$, então $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{B}$.

[redacted]

Definição Seja X um conjunto. Uma família de subconjuntos $\mathcal{B}$ é chamada de álgebra booleana se

- $\emptyset \in \mathcal{B}$
- $E \in \mathcal{B} \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}$
- $E, F \in \mathcal{B} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{B}$.

Exemplo $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d) = \{E \subset \mathbb{R}^d : E$ é elementar ou E^c é elementar$\}$ é uma álgebra booleana.

Exercício Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra booleana. Então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sse $\mathcal{B}$ é fechado sobre uniões enumeráveis <u>disjuntas</u>.

Teorema (de extensão de Carathéodory)

Seja μ^* uma medida exterior em X.

Definimos

$$\mathcal{B} := \{ E \subset X : E \text{ é mensurável à Carathéodory} \}$$

$$\left(\forall A \subset X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \right)$$

Então:

(1) $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra.

(2) $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\mu(E) := \mu^*(E)$ é uma medida.

Portanto, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida.

Prova (1) Passo 1: $\mathcal{B}$ é uma álgebra booleana
(já foi mostrado na aula passada).

Passo 2 Para provar que $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra,
pelo exercício anterior, basta considerar $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$
disjuntos e mostrar que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Provaremos que para todo conjunto $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n\Big)$$

Por causa da subaditividade, basta mostrar

$$(1) \quad \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \mu^*(A)$$

Para todo $N \geq 0$, como $E_{N+1} \in \mathcal{B}$

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n \cap E_{N+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n \setminus E_{N+1}\right)$$

$$= \mu^*(A \cap E_{N+1}) \quad \text{(já que } E_n \cap E_{N+1} = \phi \text{ se } n \neq N+1\text{)}$$

$$+ \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$

$$\underset{\text{(indução)}}{=} \sum_{n=1}^{N+1} \mu^*(A \cap E_n).$$

Portanto, para todo $N \in \mathbb{N}$,

(2) $$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n).$$

- $$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap E_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$$ (subaditividade da medida exterior)

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$ (usando (2))

Logo,

$$(3) \quad \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$

- $$\mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right).$$

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

A sequência $\left\{ \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \right\}_{N \geq 1}$ é

não crescente (já que μ^* é monótona),

logo,

$$(4) \quad \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right).$$

Usando (3) e (4), segue que

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + \lim_{N\to\infty} \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

porque $E_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \geq 1$ e $\mathcal{B}$ é uma álgebra booleana (pelo primeiro passo), logo $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \in \mathcal{B}$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Concluímos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra.

(2) Vamos provar que $\mu(E) := \mu^*(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}$ é uma medida em $\mathcal{B}$.

- $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$
- A σ-aditividade de μ.

Sejam $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}$ disjuntos.

Temos que provar

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Pela subaditividade da medida exterior, basta provar

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n)$$

e

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) \quad \forall N \geq 1$$

basta provar que

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n)$$

Sejam $E, F \in \mathcal{B}$, disjuntos. Então,

$$\mu^*(E \sqcup F) = \mu^*(E \sqcup F \cap F) + \mu^*(E \sqcup F \setminus F)$$
$$= \mu^*(F) + \mu^*(E);$$

e por indução,

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n).$$

$\blacksquare$

Lema da classe monótona

Definição Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é chamada de <u>classe monótona</u> se

$$\cdot \ \{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}, \quad E_n \nearrow E \implies E \in \mathcal{B}$$

$$\cdot \ \{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}, \quad E_n \searrow E \implies E \in \mathcal{B}.$$

Observação Toda σ-álgebra é uma classe monótona.

Definição Seja $\mathcal{A}$ uma família qualquer de subconjuntos de X. Então

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ é uma classe monótona}, \ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}\}$$

é a classe monótona mínima que contém $\mathcal{A}$.

<u>Lema</u> (da classe monótona) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra booleana. Então,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

a σ-álgebra gerada (mínima) por $\mathcal{A}$.

a classe monótona gerada (mínima) por $\mathcal{A}$.

<u>Prova</u> Como $\sigma(\mathcal{A})$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{A}$, segue que

$$\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Resta provar que

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{A}),$$

ou seja, que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra.

- $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, logo $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

- Vamos provar que $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Não é difícil ver que se $\mathcal{B}$ for uma classe monótona, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, então

$$\overline{\mathcal{B}} = \{ E^c : E \in \mathcal{B} \}$$

também é uma classe monótona, e $\overline{\mathcal{B}} \supset \mathcal{A}$.

Portanto,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ é uma classe monótona } \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \}$$

$$= \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ classe monótona} \\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}}} \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$$

Como $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$ é fechada sobre complemento, concluímos o mesmo sobre $m(\mathcal{A})$.

- Vamos provar que dada $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset m(\mathcal{A})$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in m(\mathcal{A})$.

Temos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_1 \cup E_2) \cup \dots (E_1 \cup \dots \cup E_n) \cup \dots$$

que é uma união monótona.

Basta verificar que

$$E_1 \cup E_2, \dots, E_1 \cup \dots \cup E_n, \dots \in m(\mathcal{A}).$$

Por indução, basta mostrar que

$$\forall E, F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \quad E \cup F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Passo 1 Fixe $E \in \mathcal{A}$ arbitrário, e seja

$$\mathcal{C}_E := \{ F \subset X : E \cup F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \}$$

Quero provar que

$$\boxed{E \cup F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad \forall F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})}$$

$$\iff \mathcal{C}_E \supset \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Temos que $\mathcal{C}_E \supset \mathcal{A}$ (porque $\mathcal{A}$ é uma álgebra booleana, então $E \cup F \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ $\forall E, F \in \mathcal{A}$). Além disso, $\mathcal{C}_E$ é uma classe monótona.

$$\mathscr{C}_E := \{ F \subset X : E \cup F \in m(\mathcal{A}) \}.$$

De fato,

- Se $\{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{C}_E \Rightarrow E \cup F_n \in m(\mathcal{A})$

  $F_n \nearrow F$

então $E \cup F_n \nearrow E \cup F$

$E \cup F_n \in m(\mathcal{A}) \ \forall n \geq 1$

$m(\mathcal{A})$ é uma classe monótona,

logo, $E \cup F \in m(\mathcal{A})$, então

$$F \in \mathscr{C}_E.$$

- O mesmo argumento mostra que dada

$\{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_E$, $F_n \searrow F$,

$E \cup F_n \in m(\mathcal{A})$,

$E \cup F_n \searrow E \cup F$

$m(\mathcal{A})$ classe monótona,

então $E \cup F \in m(\mathcal{A})$, logo $F \in \mathcal{C}_E$.

Concluímos que $\mathcal{C}_E$ é uma classe monótona,

então

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \forall F \in m(\mathcal{A}),\ E \cup F \in m(\mathcal{A}).$$

Passo 2 Fixe $F \in m(\mathcal{A})$ e seja

$$\mathcal{D}_F := \{E \subset X : E \cup F \in m(\mathcal{A})\}$$

Pelo passo anterior,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_F.$$

Além disso, $\mathcal{D}_F$ é uma classe monótona (mesmo argumento).

Portanto,

$$\mathcal{D}_F \supset m(\mathcal{A}).$$

Logo, $\forall E \in m(\mathcal{A})$ $\forall F \in m(\mathcal{A})$,

$$E \cup F \in m(\mathcal{A}).$$

$\blacksquare$