Premedidas e o teorema de extensão de Kolmogorov

<u>Definição</u> Seja $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana em X. Uma função $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,\infty]$ t.q.

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_0$ são disjuntos e <u>se</u> $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_0$,

então

$$\mu_0\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

é chamada de uma pre-medida em X.

<u>Observação</u> (1) Se $E, F \in \mathcal{B}_0$, $E \subset F \Rightarrow \mu_0(E) \leq \mu_0(F)$.

(2) Se $E_n \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$ e $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}_0$ então

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

Observação Pense em $\mathcal{B}_0$ como a coleção de conjuntos elementares (e os seus complementos) em $\mathbb{R}^d$ e em μ_0 como a medida elementar.

Definição Uma pre-medida μ_0 em $\mathcal{B}_0$ é σ-finita se existem $A_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$ tais que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e $\mu_0(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Podemos supor que $\{A_n\}_{n \geq 1}$ são disjuntos, ou, se for conveniente, que $A_n \nearrow X$.

Teorema (de extensão de Hahn-Kolmogorov)
Sejam X um conjunto, $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana em X e μ_0 uma premedida em $\mathcal{B}_0$.

Então, μ_0 pode ser extendida para uma medida μ em $\sigma(\mathcal{B}_0)$. Portanto, $(X, \sigma(\mathcal{B}_0), \mu)$ é um espaço de medida.

Se μ_0 for σ-finita, então a extensão é única.

Observação A extensão não é necessariamente única se μ_0 não é σ-finita. Por exemplo, seja

$$\mathcal{B}_0 = \{E \subset \mathbb{R} : E = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i) \text{ ou } E^c = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i)\}$$

$a_i < b_i$

Então $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana.

Seja $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \longrightarrow [0,\infty]$,

$$\mu_0(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } E \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } E = \emptyset. \end{cases}$$

Então, μ_0 é uma premedida não σ-finita.

μ_0 possui pelo menos duas extensões diferentes:

$$\mu(E) = +\infty \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ E \neq \emptyset.$$

e $\#(E) =$ a cardinalidade de E.

Prova (do teorema de Hahn-Kolmogorov) Imitamos a construção da medida de Lebesgue a partir da medida elementar.

- Definimos $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ por

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \; E_n \in \mathcal{B}_0 \right\}.$$

Não é difícil ver que μ^* é uma medida exterior.

• Seja $\mathcal{B} := \{ E \subset X : E$ é mensurável à Carathéodory com respeito a $\mu^* \}$.

Pelo teorema de extensão de Carathéodory, $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e $\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}}$ é uma medida.

Portanto, resta provar que μ é uma extensão de μ_0, ou seja,

(i) $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ (o que vai implicar $\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}$)

(ii) $\mu_0(E) = \mu^*(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}_0$.

Começamos com (i). Sejam $E \in \mathcal{B}_0$ e $A \subset X$.
Temos que provar o seguinte

$$(1) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Podemos supor que $\mu^*(A) < \infty$ (caso contrário, (1) seja evidente).

Fixe $\varepsilon > 0$. Então existem $E_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$, tais que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $E_n \in \mathcal{B}_0$, $\forall n \geq 1$, tem-se

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap E$$

e $E_n \cap E \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$ ($\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana).

Logo,

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E \cap E_n) \qquad (2)$$

Do mesmo jeito, $A \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E$

$E_n \setminus E \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$.

Logo, $\mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E \setminus E_n) \qquad (3)$

Usando (2) e (3) segue que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_0(E_n \cap E) + \mu_0(E_n \setminus E) \right)$$

$$= \sum_{n=1} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon,$$

porque $E_n = (E_n \cap E) \sqcup (E_n \setminus E)$,

$E_n, \ E_n \cap E, \ E_n \setminus E \in \mathcal{B}_0$

e μ_0 é uma pré-medida (então é aditiva)

Quando $\varepsilon \to 0$, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A)$,

provando (1).

(ii) Provaremos que $\mu_0(E) = \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_0$.

Como $\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathcal{B}_0 \right\}$

e $E \in \mathcal{B}_0$, segue que $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$.

Resta provar que $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}_0$ uma cobertura de E.

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E = E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n)$$

Note que $F_n := E \cap E_n \in \mathcal{B}_0 \quad \forall n \geq 1$.

Então, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \in \mathcal{B}_0$, $E \in \mathcal{B}_0$,
$F_n \subset E_n$

e como μ_0 é uma pré-medida,

$$\mu_0(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

Como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ foi uma cobertura arbitrária de E por conjuntos em $\mathcal{B}_0$, segue que

$$\mu_0(E) \leq \mu^*(E) = \inf\left\{ \sum \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \in \mathcal{B}_0 \right\},$$

o que mostra a segunda afirmação.

Unicidade da extensão (sob a hipótese μ_0 é σ-finita).

Sejam $\mu, \nu : \sigma(\mathcal{B}_0) \to [0, \infty]$ tais que

$$\mu(E) = \mu_0(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_0.$$

Temos que provar: $\mu(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{B}_0)$.

Como μ_0 é σ-finita, existe uma sequência $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}_0$ t.q. $A_n \uparrow X$ e

$$\mu(A_n) < \infty \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Seja

$$\mathcal{B} := \{ E \in \sigma(\mathcal{B}_0) : \mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n) \text{ para todo } n \geq 1 \}.$$

Note que se $E \in \mathcal{B}$ então, pelo teorema da convergência monótona para conjuntos,

$$\mu(E) = \nu(E).$$

De fato, como $A_n \nearrow X$, $E \cap A_n \nearrow E \cap X = E$, portanto,

$$\mu(E \cap A_n) \nearrow \mu(E) \text{ e } \nu(E \cap A_n) \nearrow \nu(E).$$

$$\mathcal{B} := \{ E \in \sigma(\mathcal{B}_0) : \mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$$

$$\text{para todo } n \geq 1 \}.$$

Basta provar que $\mathcal{B}$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{B}_0$. Pelo lema da classe monótona, isso implicaria $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)$, logo para todo $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \nu(E)$, provando a unicidade da extensão.

- Dado $E \in \mathcal{B}_0$, como $E \cap A_n \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$, temos

$$\left.\begin{array}{l} \mu(E \cap A_n) = \mu_0(E \cap A_n) \\ \nu(E \cap A_n) = \mu_0(E \cap A_n) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in \mathcal{B}.$$

• Seja $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_k \nearrow E$. Então,

$$\mu(E_k \cap A_n) = \nu(E_k \cap A_n) \quad \forall n \geq 1 \quad \forall k \geq 1.$$

Como $E_k \cap A_n \nearrow E \cap A_n$ quando $k \to \infty$, pelo TCM,

$$\mu(E_k \cap A_n) \longrightarrow \mu(E \cap A_n)$$

$$\nu(E_k \cap A_n) \longrightarrow \nu(E \cap A_n)$$

Logo, $\mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$ para todo $n \geq 1$, então $E \in \mathcal{B}$.

· Seja $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_k \searrow E$. Então

$$\mu(E_k \cap A_n) = \nu(E_k \cap A_n) \quad \forall n \geq 1 \ \forall k \geq 1.$$

Como $E_k \searrow E$, $E_k \cap A_n \searrow E \cap A_n$ quando $k \to \infty$.

Mas $\mu_0(E_k \cap A_n) \leq \mu_0(A_n) < \infty$, então

o TCM para baixo é aplicável e implica:

$$\mu(E_k \cap A_n) \to \mu(E \cap A_n) \qquad k \to \infty$$
$$\nu(E_k \cap A_n) \to \nu(E \cap A_n)$$

Logo, $\mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n) \ \forall n \geq 1$, então $E \in \mathcal{B}$.

$\square$

Aplicações importantes do teorema de extensão de Kolmogorov:

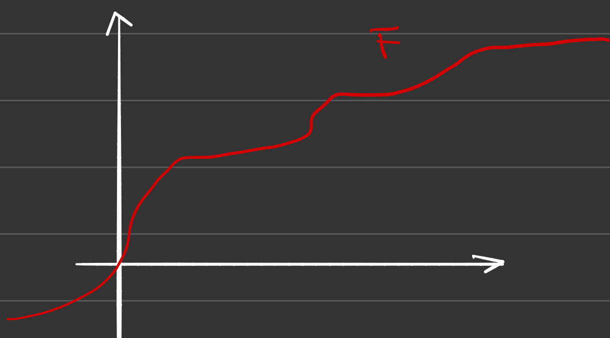
- a medida de Lebesgue - Stieltjes

- a medida produto (medidas de Bernoulli, de Markov).

A medida de Lebesgue-Stieltjes

Teorema (de existência da medida de L-S)

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e de classe C^1. Então existe uma única medida de Borel



$$m_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \text{ tal que}$$

$$m_F([a,b]) = F(b) - F(a)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Além disso, $\boxed{dm_F = F' \, dm}$ no sentido que

$$m_F(E) = \int_E F' \, dm \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ademais,

$$\int \varphi \, dm_F = \int \varphi \cdot F' \, dm$$

para toda função mensurável $\varphi \geq 0$ e para toda função $\varphi \in L^1(dm_F)$.

<u>Prova</u> (esboço). Provaremos a primeira parte: a existência e unicidade de m_F.

Dado um intervalo finito I com pontos extremos a e b, $a \leq b$, seja

$$\mu_0(I) := F(b) - F(a) < \infty$$

$$\mu_0(-\infty, a] := F(a) - \inf_{y \in \mathbb{R}} F(y)$$

$$\mu_0(a, \infty) := \sup_{y \in \mathbb{R}} F(y) - F(a).$$

Se $I_1, \ldots, I_k$ são intervalos disjuntos (finitos ou infinitos)

$$\mu_0(I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k) := \mu_0(I_1) + \ldots + \mu_0(I_k).$$

Seja

$$\mathcal{B}_0 := \{ I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_1, \ldots, I_k \text{ são intervalos finitos ou infinitos e } k \geq 1 \}.$$

Então $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana e μ_0 é uma pré-medida σ-finita em $\mathcal{B}_0$ (exercício).

Pelo teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov, existe uma única medida m_F em $\sigma(\mathcal{B}_0) = \sigma(\mathbb{R})$ que coincide com μ_0 em $\mathcal{B}_0$. Em particular,

$$m_F([a,b]) = F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b,$$

provando a primeira parte do teorema.