# A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX

SILVIUS KLEIN

Sumário

1. O problema de mensurabilidade 2
2. A medida elementar 2
3. A medida de Jordan 6
Um truque comum em análise 7
4. A integral de Riemann-Darboux 10
4.1. A integral de Riemann 10
4.2. A integral de Darboux 11
4.3. A equivalência entre a integral de Riemann e a integral de Darboux 17
4.4. O teorema de Lebesgue (continuidade v. integrabilidade à Riemann-Darboux) 22
A oscilação de uma função 25

O objetivo principal deste texto é o estudo da medida de Lebesgue e da integral de Lebesgue. Já estamos familiarizados com um outro tipo de integral, a integral de Riemann. No entanto, a integral de Riemann é insuficiente na análise matemática.

A integração de Lebesgue é um refinamento da teoria da integração de Riemann, proporcionando uma ferramenta mais fina para matemática avançada.

**Exemplo 1.** Considere a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função *não* é integrável à Riemann. De fato, dada qualquer partição

$$\mathcal{P} = (0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1)$$

de $[0,1]$, como cada subintervalo $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ contém pontos racionais e irracionais, as somas de Darboux superior e inferior correspondentes são

$$\overline{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} |I_j| = 1\,,$$

$$\underline{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = 0\,.$$

Além disso, considere uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots\}$ de $\mathbb{Q}$ e define, para todo $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência de funções $\{f_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$f_1 \leq f_2 \leq \ldots f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$

$f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in [0,1]$

$f_n(x)$ é integrável à Riemann para todo $n \geq 1$ (já que $f_n$ possui um número *finito* de pontos de descontinuidade),

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0\ .$$

Contudo, a função $f$, que é o *limite* (pontual, monótono) da sequência de funções integráveis a Riemann $\{f_n\}_{n\geq 1}$, não é integrável à Riemann.

Portanto, precisamos de um conceito de integração mais flexível, que é fechado com respeito a tais limites.

## 1. O problema de mensurabilidade

O espaço de referência é $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \ldots$). O objetivo é definir um conceito de medida "física" aplicável a uma ampla coleção de conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$, a serem chamados de *conjuntos mensuráveis.*

Os conjuntos do espaço euclidiano mais fáceis de medir são *caixas* retangulares, para quais o volume (respectivamente, o comprimento em dimensão um ou área em dimensão dois) representa uma medida física natural.

Mais geralmente,

(i) O que significa para um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ ser mensurável?

(ii) Se $E$ é mensurável, qual é a sua medida?

(iii) Que propriedades básicas (ou axiomas) devem ser satisfeitas por uma medida? Por exemplo, se $E$ é a reunião disjunta de dois conjuntos mensuráveis $E_1$ e $E_2$, qual deveria ser a relação entre suas medidas?

Começamos com a medida de Jordan, relacionada à integral de Riemann; depois disso apresentaremos um conceito de medida mais refinado, a medida de Lebesgue, que nos permitirá definir a integral de Lebesgue.

## 2. A medida elementar

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, i.e. um intervalo do tipo $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$ ou $(a, b)$. Define o seu comprimento por $|I| := b - a$.

Uma *caixa* em $\mathbb{R}^d$ é um produto cartesiano

$$B = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$$

de intervalos limitados. Define seu volume por $|B| := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_d|$.

**Definição 1.** Um *conjunto elementar* $E \subset \mathbb{R}^d$ é qualquer união *finita* de caixas

$$E = B_1 \cup \ldots \cup B_n\ .$$

**Exercício 1.** Se $E, F \subset \mathbb{R}^d$ são conjuntos elementares, então $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$, $E \triangle F$ são conjuntos elementares também.

Além disso, qualquer translação

$$E + a := \{x + a \colon x \in E\}\ ,$$

onde $a \in \mathbb{R}^d$ e $E$ é um conjunto elementar, também é um conjunto elementar.

**Lema 1.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar qualquer.*

*(i) $E$ pode ser escrito como uma união* disjunta *de caixas.*

*(ii) Se $E = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ e $E = B_1' \sqcup \ldots \sqcup B_m'$ são duas representações de $E$ como uniões disjuntas de caixas, então*

$$|B_1| + \ldots + |B_n| = |B_1'| + \ldots + |B_m'| \,.$$

*Demonstração.* Vamos fazer a prova em dimensão $d = 1$. O argumento em dimensão maior é similar (exercício).

(i) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto elementar, isto é, uma união finita de intervalos limitados $I_1, \ldots, I_n$. Então

$$\begin{aligned} E &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots \cup I_n \\ &= I_1 \sqcup (I_2 \setminus I_1) \sqcup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \sqcup \ldots \sqcup (I_n \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_{n-1}))\,. \end{aligned}$$

Então basta provar a seguinte afirmação: dados quaisquer intervalos limitados $I$, $I_1$, …, $I_k$, o conjunto

$$I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$$

pode ser descrito como uma união finita de intervalos disjuntos.

Observe que a interseção entre um intervalo limitado e um intervalo qualquer é sempre um intervalo limitado. Além disso, o complemento de um intervalo limitado é uma união de dois intervalos disjuntos (não limitados).

Então, como

$$I \setminus I_1 = I \cap I_1^{\complement}$$

temos que $I \setminus I_1$ é uma união de dois (então finita) intervalos disjuntos e limitados.

Além disso,

$$I \setminus (I_1 \cup I_2) = I \cap (I_1 \cup I_2)^{\complement} = I \cap I_1^{\complement} \cap I_2^{\complement} = \left(I \cap I_1^{\complement}\right) \cap I_2^{\complement}$$

que, pelo argumento anterior, será uma união finita (de no máximo quatro) intervalos limitados disjuntos.

Por indução, concluímos que o conjunto $I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$ pode ser descrito como uma união finita de intervalos limitados disjuntos.

(ii) Vamos usar um argumento de discretização: dado qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$,

$$|I| = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N}\,, \tag{1}$$

onde

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} := \left\{ \frac{k}{N} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De fato, se $I = (a, b)$, para todo $N \geq 1$ sejam $k_N, l_N \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{k_N}{N} \leq a < \frac{k_N + 1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{l_N}{N} < b \leq \frac{l_N + 1}{N}\,.$$

Note que $\frac{k_N}{N} \to a$ e $\frac{l_N}{N} \to b$ quando $N \to \infty$.

Segue que

$$(a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{k_N + 1}{N}, \ldots, \frac{l_N}{N} \right\},$$

então

$$\#\left((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = l_N - k_N\,.$$

Então
$$\frac{\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N} = \frac{\#\left((a,b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N}$$
$$= \frac{l_N - k_N}{N} = \frac{l_N}{N} - \frac{k_N}{N} \to b - a = |I| \ ,$$
mostrando (1).

Seja $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$. Como os intervalos $I_1, \ldots, I_n$ são disjuntos, dado qualquer $N \geq 1$, temos que
$$\#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = \#\left((I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$
$$= \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) + \ldots + \#\left(I_n \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) .$$

Dividindo os dois lados acima por $N$, passando ao limite quando $N \to \infty$ e usando (1), concluímos que
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N} = |I_1| + \ldots + |I_n| \ .$$

A expressão
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)}{N}$$
não depende da representação $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ de $E$ como uma união disjunta de intervalos limitados, provando assim o nosso lema. □

O lema anterior nos permite definir a medida de um conjunto elementar.

**Definição 2.** Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar, e seja $E = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ uma representação qualquer como união disjunta de caixas. Definimos a medida de $E$ por
$$\mathrm{m}(E) := |B_1| + \ldots + |B_n| \ .$$

Lembramos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *elementar* se pode ser escrito como união finita de caixas $E = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Além disso, sempre é possível tomar caixas de forma que esta união seja disjunta. Considere o conjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) := \left\{ E \subset \mathbb{R}^d \colon E \text{ elementar } \right\}$ e vamos definir a *medida elementar* como sendo a função $\mathrm{m}\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{m}(E) := |B_1| + \cdots + |B_n|$.

**Teorema 1.** *(Propriedades básicas da medida elementar) Sejam $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$ e $\mathrm{m}$ a medida elementar definida acima. São válidas:*

*(1) (positividade) $\mathrm{m}(E) \geq 0$, para todo $E$ e $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.*
*(2) (aditividade finita) Se $E \cap F = \emptyset$ então $\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.*
*Por indução, $\mathrm{m}(E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k) = \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_k)$.*
*(3) Se $E$ é uma caixa então $\mathrm{m}(E) = |E|$.*
*(4) Se $E \subset F$ então $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$.*
*(5) (monotonicidade) Se $E \subset F$ então $\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)$.*
*(6) (subaditividade finita) $\mathrm{m}(E \cup F) \leq \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.*
*(7) (invariância à translação) $\mathrm{m}(E + a) = \mathrm{m}(E)$ para todo $a \in \mathbb{R}^d$.*

*Demonstração.* (1), (2), (3), (7) são evidentes e (5), (6) estão na Lista 1.

Vamos provar (4): Como $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, em que $E$ e $F \setminus E$ são conjuntos elementares. Assim, segue por (2) que
$$\mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F \setminus E)$$
Portanto, $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$ □

**Teorema 2.** *(Unicidade da medida elementar) Suponha que* $\lambda\colon \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ *seja uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

*(1)* $\lambda(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$*;*

*(2)* $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$*, para todo* $E, F \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$*;*

*(3)* $\lambda(E + a) = \lambda(E)$*, para todo* $a \in \mathbb{R}^d$ *e* $E \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^d\right)$*;*

*(4)* $\lambda\big([0,1)^d\big) = 1$*.*

*Então,* $\lambda \equiv \mathrm{m}$*.*

*Demonstração.* (em dimensão 1)

É fácil verificar que a aditividade e a positividade da função $\lambda$ implicam sua monotonicidade. De fato, se $E \subset F$ então podemos escrever $F = E \sqcup (F \setminus E)$. Assim, pela aditividade de $\lambda$ segue que $\lambda(F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E)$ e como $\lambda(F \setminus E) \geq 0$ concluímos que $\lambda(E) \leq \lambda(F)$.

**Passo 1.** Provaremos que $\lambda([0,x]) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Temos que $\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, logo $\lambda\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \lambda\left[0, \frac{1}{2}\right)$. Como $[0,1) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, segue que

$$1 = \lambda[0,1) = \lambda\Big[0, \frac{1}{2}\Big) + \lambda\Big[\frac{1}{2}, 1\Big) = 2\lambda\Big[0, \frac{1}{2}\Big).$$

Portanto $\lambda\left[0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Mais geralmente, para todo $n \geq 1$ e para todo $0 \leq k < n$, $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \left[0, \frac{1}{n}\right) + \frac{k}{n}$, então $\lambda\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \lambda\left[0, \frac{1}{n}\right)$.

Note que $[0,1) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big)$. Logo

$$1 = \lambda[0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big) = n\,\lambda\Big[0, \frac{1}{n}\Big),$$

mostrando que $\lambda\left[0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Além disso,

$$\lambda\Big[0, \frac{k}{n}\Big) = \lambda\Big[0, \frac{1}{n}\Big) + \lambda\Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big) + \ldots + \lambda\Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big) = \frac{k}{n}.$$

Seja $x > 0$ e note que para todo $n \geq 1$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k_n}{n} \leq x < \frac{k_n+1}{n}$, então, em particular, $\frac{k_n}{n} \to x$ quando $n \to \infty$. Logo, temos que $\left[0, \frac{k_n}{n}\right) \subset [0,x) \subset \left[0, \frac{k_n+1}{n}\right)$. Pela monotonicidade da função $\lambda$,

$$\Big[0, \frac{k_n}{n}\Big) \leq \lambda[0,x) \leq \lambda\Big[0, \frac{k_n+1}{n}\Big),$$

ou seja,

$$\frac{k_n}{n} \leq \lambda\,[0,x) \leq \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Como $\frac{k_n}{n} \to x$ quando $n \to \infty$, concluímos que $\lambda\,[0,x) = x$.

**Passo 2.** Seja $[a,b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b$. Como $[a,b) = [0, b-a) + a$,

$$\lambda\,[a,b) = \lambda\,[0, b-a) = b - a.$$

Observe que para todo $n \geq 1$ temos $\{0\} \subset \left[0, \frac{1}{n}\right)$ e pela monotonicidade de $\lambda$ segue que

$$0 \leq \lambda\{0\} \leq \lambda\Big[0, \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, $\lambda\{0\} = 0$ e como $\{x\} = \{0\} + x$ segue que $\lambda\{x\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, concluímos que para todo intervalo limitado $I$, $\lambda\,(I) = |I|$.

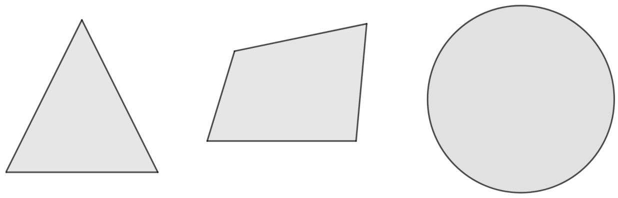
**Passo 3.** Seja $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $E = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$. Como $\lambda$ é aditiva concluímos que

$$\lambda(E) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n) = |I_1| + \ldots + |I_n| = \mathrm{m}(E).$$

$\square$

## 3. A medida de Jordan

Os conjuntos abaixo e o conjunto de Cantor (em $\mathbb{R}$) não são elementares.



Estederemos o conceito de medida a uma família maior de conjuntos, que contém esses exemplos.

**Definição 3.** Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Definimos a

- *medida interior de Jordan* de $E$ por
$$\mathrm{m}_{*,J}(E) := \sup\{\mathrm{m}(A) \colon A \subset E, A \text{ elementar}\};$$
- *medida exterior de Jordan* de $E$ por
$$\mathrm{m}^{*,J}(E) := \inf\{\mathrm{m}(B) \colon E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Observe que $0 \leq \mathrm{m}_{*,J}(E) \leq \mathrm{m}^{*,J}(E) < \infty$, para qualquer $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado.

**Definição 4.** Se $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) =: \mathrm{m}(E)$, então dizemos que $E$ é um conjunto *Jordan mensurável*. Neste caso, $\mathrm{m}(E)$ é a *medida de Jordan* de $E$.

**Observação 1.** Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado.
(1) Se $E$ é um conjunto elementar, então $E$ é Jordan mensurável.
(2) Se $\mathrm{m}^{*,J}(E) = 0$ então $E$ é Jordan mensurável e $\mathrm{m}(E) = 0$.

**Teorema 3.** *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:*
*(i) $E$ é Jordan mensurável;*
*(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existem conjuntos elementares $A$ e $B$ tais que*
$$A \subset E \subset B \text{ e } \mathrm{m}(B \setminus A) < \epsilon;$$
*(iii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $A$ conjunto elementar tal que $\mathrm{m}^{*,J}(A \Delta E) < \epsilon$.*

*Demonstração.* A equivalência $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ está na Lista 1.

Vamos mostrar $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Suponha que $E$ seja Jordan mensurável, então tem-se $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}(E)$. Fixe $\epsilon > 0$. Como

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \inf\{\mathrm{m}(B) \colon B \supset E \text{ elementar}\},$$

existe $B \supset E$ conjunto elementar tal que

$$\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(E) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Além disso,

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(E) = \sup\{\mathrm{m}(A) \colon A \subset E \text{ elementar}\}.$$

Portanto existe $A \subset E$ conjunto elementar tal que

$$\text{m}(A) > \text{m}(E) - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

Desta forma, temos que $A \subset E \subset B$ em que $A$ e $B$ são conjuntos elementares e por (2) e (3) segue que

$$\begin{aligned}\text{m}(B \setminus A) &= \text{m}(B) - \text{m}(A) \\ &\leq \text{m}(E) + \frac{\epsilon}{2} - \text{m}(E) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por outro lado, fixe $\epsilon > 0$ e suponha que existam $A$ e $B$ conjuntos elementares de modo que $A \subset E \subset B$ e $\text{m}(B) - \text{m}(A) = \text{m}(B \setminus A) < \epsilon$. Então, pelas definições das medidas exterior e interior de Jordan,

$$0 \leq \text{m}^{*,J}(E) - \text{m}_{*,J}(E) \leq \text{m}(B) - \text{m}(A) < \epsilon.$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\text{m}^{*,J}(E) - \text{m}_{*,J}(E) = 0$, ou seja, $E$ é Jordan mensurável. $\square$

**Um truque comum em análise.**

- Para provar que $a = 0$ (onde $a \geq 0$) é suficiente mostrar que
$$a < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$
- Para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $|y - x| = 0$, ou seja,
$$|y - x| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$
- Alternativamente, para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $x \leq y$ e $y \leq x$, ou seja, que
$$x < y + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{e} \quad y < x + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

**Exercício 2.** Prove que a região delimitada por um triângulo é Jordan mensurável e também prove a fórmula da área (ou seja, a medida de Jordan) de um triângulo.

**Teorema 4.** *(Propriedades básicas da medida de Jordan)*

*(1) Se $E$ e $F$ são Jordan mensuráveis então $E \cup F$, $E \cap F$, $F \setminus E$, $E \setminus F$ e $E \Delta F$ são Jordan mensuráveis.*
*(2) (positividade) $\text{m}(E) \geqslant 0$.*
*(3) (aditividade) Se $E \cap F = \emptyset$ então $\text{m}(E \sqcup F) = \text{m}(E) + \text{m}(F)$.*
*(4) (invariância à translação) $\text{m}(E + a) = \text{m}(E)$, para todo $a \in \mathbb{R}^d$.*
*(5) (monotonicidade) Se $E \subset F$ então $\text{m}(E) \leqslant \text{m}(F)$.*
*(6) (subaditividade) $\text{m}(E \sqcup F) \leqslant \text{m}(E) + \text{m}(F)$.*

*Demonstração.* Faremos a prova do item (3), os demais são deixados como exercícios.

Inicialmente mostraremos que se $E$ e $F$ são Jordan mensuráveis então $E \cup F$ também é Jordan mensurável. Fixe $\varepsilon > 0$ e veja que existem $A$ e $B$ conjuntos elementares tais que

$$A \subset E \subset B, \quad \text{m}(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

e também existem $C$ e $D$ conjuntos elementares tais que

$$C \subset F \subset D, \quad \text{m}(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Deste modo, observe que $A \cup C$ e $B \cup D$ são conjuntos elementares tais que $A \cup C \subset E \cup F \subset B \cup D$. Como evidentemente

$$(B \cup D) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus A) \setminus (D \setminus C)$$

usando (4) e (5) temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\left((B \cup D) \setminus (A \cup C)\right) &\leqslant \mathrm{m}\left((B \setminus A) \cup (D \setminus C)\right) \\ &\leqslant \mathrm{m}(B \setminus A) + \mathrm{m}(D \setminus C) \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $E \cup F$ é Jordan mensurável.

Sejam $E$ e $F$ dois conjuntos Jordan mensuráveis disjuntos. Queremos mostrar que

$$\mathrm{m}(E \sqcup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F).$$

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Temos que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(E) = \sup \{\mathrm{m}(A) : A \subset E, A \text{ elementar}\},$$

logo existe $A \subset E$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(A) > \mathrm{m}(E) - \varepsilon.$$

Similarmente, existe $C \subset F$ conjunto elementar tal que

$$\mathrm{m}(C) > \mathrm{m}(F) - \varepsilon.$$

Como $E \cap F = \emptyset$ segue que $A \cap C = \emptyset$. Desta forma, $A$ e $C$ são conjuntos elementares disjuntos, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A \cup C) &= \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(C) \\ &> \mathrm{m}(E) - \varepsilon + \mathrm{m}(F) - \varepsilon \\ &= \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas $A \cup C$ é elementar e $A \cup C \subset E \cup F$, então $\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(A \cup C)$ e portanto

$$\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\mathrm{m}(E \cup F) \geqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$.

Por outro lado, sabemos que

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(E) = \inf \{\mathrm{m}(B) : B \supset E, B \text{ elementar}\},$$

então existe $B \supset E$ conjunto elementar tal que

$$\mathrm{m}(B) < \mathrm{m}(E) + \varepsilon.$$

Similarmente, existe $D \supset F$ conjunto elementar de modo que

$$\mathrm{m}(D) < \mathrm{m}(F) + \varepsilon.$$

Portanto, temos que

$$\mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(D) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) + 2\varepsilon. \tag{6}$$

Como $B$ e $D$ são elementares

$$\mathrm{m}(B \cup D) \leqslant \mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(D). \tag{7}$$

Mas $B \cup D \supset E \cup F$, com $B \cup D$ conjunto elementar. Então

$$\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(B \cup D). \tag{8}$$

Segue de (6), (7) e (8) que

$$\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) + 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F)$. Portanto,

$$\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F).$$

□

**Exemplo 2.** O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é Jordan mensurável e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

*Demonstração.* De fato, basta mostrarmos que $\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$.

Observe que o conjunto de Cantor é construído indutivamente da seguinte forma.

No primeiro passo retiramos o intervalo $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de $[0,1]$, e denotamos por $\mathcal{C}_1$ o conjunto de pontos restantes, ou seja, $\mathcal{C}_1 := [0,1] \setminus I_1$. Observe que $\mathcal{C}_1$ é um conjunto elementar e

$$\mathrm{m}(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

No segundo passo, vamos repetir esse processo nos dois intervalos de $\mathcal{C}_1$, ou seja, retiramos os intervalos $I_2^1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $I_2^2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ de $\mathcal{C}_1$. Considere $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$ e veja que $\mathrm{m}(I_2) = 2 \cdot \frac{1}{3^2}$. Defina $\mathcal{C}_2 := [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2)$, e note que $\mathcal{C}_2$ é um conjunto elementar e

$$\mathrm{m}(\mathcal{C}_2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}\right).$$

Analogamente, no $n$-ésimo passo, retiramos o conjunto $I_n$ de $\mathcal{C}_{n-1}$, em que

$$\mathrm{m}(I_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Definimos $\mathcal{C}_n := [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n)$. É fácil ver que é um conjunto elementar e

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(\mathcal{C}_n) &= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{3^i} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Por definição o conjunto de Cantor é $\mathcal{C} := \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{C}_n$. Em particular, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$ para todo $n \geqslant 1$ e todos os conjuntos $\mathcal{C}_n$ são elementares, logo

$$\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) \leqslant \mathrm{m}(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Portanto, $\mathrm{m}^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$, monstrando que $\mathcal{C}$ é Jordan mensurável, com medida zero. $\square$

**Exercício 3.** Seja $E$ um conjunto limitado em $\mathbb{R}^d$. Denote por

- $\overline{E}$ o *fecho* de $E$;
- $\mathring{E}$ o *interior* de $E$;
- $\partial E$ a *fronteira* de $E$, ou seja, $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$.

Prove que

(i) $\mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(\overline{E})$.

(ii) $\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(\mathring{E})$.

(iii) $E$ é Jordan mensurável se, e somente se, $\mathrm{m}^{*,J}(\partial E) = 0$.

**Exemplo 3.** O conjunto $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ não é Jordan mensurável.

*Demonstração.* De fato, observe que $\overline{E} = [0,1]$, logo

$$\mathrm{m}^{*,J}(E) = \mathrm{m}^{*,J}(\overline{E}) = \mathrm{m}^{*,J}[0,1] = 1.$$

Por outro lado temos que $\mathring{E} = \emptyset$ então

$$\mathrm{m}_{*,J}(E) = \mathrm{m}_{*,J}(\mathring{E}) = 0.$$

Logo $\mathrm{m}^{*,J}(E) \neq \mathrm{m}_{*,J}(E)$, monstrando que $E$ não é Jordan mensurável. □

## 4. A integral de Riemann-Darboux

Existem duas abordagens diferentes para definir o conceito clássico de *integração*, a saber, via somas de Riemann ou via somas de Darboux. Estas duas maneiras são na verdade equivalentes. Acontece que a abordagem via somas de Darboux seja mais facilmente generalizável, levando eventualmente ao conceito mais fino de integração Lebesgue.

4.1. **A integral de Riemann.** Sejam $a < b$, $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e

$$\overline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

uma escolha de pontos de amostragem tais que

$$x_j^* \in I_j, \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

A norma (ou malha) da partição $\mathcal{P}$ é dada por

$$\Delta(\mathcal{P}) \coloneqq \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}.$$

A *soma de Riemann* correspondente é definida como

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} f\left(x_j^*\right)\, |I_j|.$$

**Definição 5.** Uma função $f$ é dita *Riemann integrável* se

$$\lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) \text{ existe.} \tag{9}$$

Neste caso, o valor do limite, $\mathcal{I}(f)$, é chamado de *integral de Riemann* de $f$.

**Comentário 1.** O significado formal do limite em (9) é o seguinte: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ e todos pontos de amostragem $\overline{x}^*$,

$$\text{se } \Delta(\mathcal{P}) < \delta \quad \text{então} \quad |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) - \mathcal{I}(f)| < \varepsilon.$$

**Lema 2.** *Se $f$ é Riemann integrável então $f$ é limitada.*

*Demonstração.* Exercício. □

**Observação 2.** Sejam $f \geqslant 0$, $\mathcal{P}$ uma partição, $\overline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ pontos de amostragem e

$$c_j \coloneqq f\left(x_j^*\right).$$

Então,

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j |I_j|.$$

4.2. **A integral de Darboux.** Apresentamos o conceito de integrabilidade à Darboux de uma maneira ligeiramente diferente (mas equivalente) em comparação àquela usada em cursos básicos de análise real.

**Definição 6.** Uma função $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função *escada* se existem uma partição

$$[a,b] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$$

e constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $s(x) = c_j$ se $x \in I_j$ para algum $1 \leq j \leq n$.

**Definição 7.** A função indicadora de um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é definida por

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Portanto uma função $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada se e somente se

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}$$

onde $\{I_1, \dots, I_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Lembramos algumas propriedades básicas da função indicadora de um conjunto. Sejam $E, F \subset \mathbb{R}^d$.

- $\mathbf{1}_{E \cap F} = \mathbf{1}_E \cdot \mathbf{1}_F$ ,
- se $E \cap F = \emptyset$ então $\mathbf{1}_{E \sqcup F} = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F$ ,
- $E \subset F$ se e somente se $\mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_F$ .

**Definição 8.** Seja $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{I_j}$ uma função escada. A integral de Darboux de $s$ é definida por:

$$\int_a^b s(x)dx := \sum_{j=1}^{n} c_j |I_j|.$$

Como alternativa, às vezes usaremos a notação simplificada $\displaystyle\int_a^b s$ para denotar a integral de Darboux da função $s$.

**Observação 3.** Este conceito é bem definido, no sentido que ele não depende da representação de $s$ como combinação linear de funções indicadoras, ou seja: se $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{l=1}^{m} d_l J_l$ então

$$\sum_{k=1}^{n} c_k |I_k| = \sum_{l=1}^{m} d_l |J_l| \,.$$

De fato,

$$\Big\{ I_k \cap J_l \colon 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m, I_k \cap J_l \neq \emptyset \Big\}$$

é uma partição mais fina de $[a,b]$.

Como $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{l=1}^{m} d_l J_l$, se $x \in I_k \cap J_l$ então $s(x) = c_k$ e $s(x) = d_l$, portanto $c_k = d_l$.

Os intervalos $\{J_1, \dots, J_m\}$ formam uma partição de $[a,b]$. Em particular, para todo $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$I_k = \bigsqcup_{l\colon I_k \cap J_l \neq \emptyset} (I_k \cap J_l) \,.$$

Similarmente, os intervalos $\{I_1, \dots, I_n\}$ formam uma partição de $[a, b]$, e em particular, para todo $1 \leq j \leq m$ tem-se

$$J_l = \bigsqcup_{k\colon I_k \cap J_l \neq \emptyset} (I_k \cap J_l) \, .$$

Segue-se que para todos os índices $k$ e $l$ temos

$$|I_k| = \sum_l |I_k \cap J_l| \quad \text{e} \quad |J_l| = \sum_k |I_k \cap J_l|.$$

Logo,

$$\sum_k c_k |I_k| = \sum_k c_k \sum_l |I_k \cap J_l| = \sum_{k,l\colon I_k \cap J_l \neq \emptyset} c_k |I_k \cap J_l| \, ,$$

e

$$\sum_l d_l |J_l| = \sum_l d_l \sum_k |I_k \cap J_l| = \sum_{k,l\colon I_k \cap J_l \neq \emptyset} d_l |I_k \cap J_l| \, .$$

Lembrando que $c_k = d_l$ sempre que $I_k \cap J_l \neq \emptyset$, a igualdade $\displaystyle\sum_k c_k |I_k| = \sum_l d_l |J_l|$ é assim estabelecida.

**Observação 4.** Acontece que sempre podemos escolher a *mesma* partição para representar duas (ou um número finito) de funções escada, o que será muito útil em vários argumentos.

De fato, se $s, \sigma \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ são duas funções escada, então podemos representá-las como

$$s = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{I_k}$$

e

$$\sigma = \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{1}_{J_l}.$$

Considere a partição mais fina do intervalo $[a, b]$,

$$\Big\{ I_k \cap J_l \colon 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m \Big\}.$$

Como

$$I_k = \bigsqcup_l (I_k \cap J_l) \, ,$$

segue que

$$\mathbf{1}_{I_k} = \sum_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l} \, .$$

Similarmente,

$$J_l = \bigsqcup_k (I_k \cap J_l) \, ,$$

então

$$\mathbf{1}_{J_l} = \sum_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l} \, .$$

Concluímos que

$$s = \sum_k c_k \mathbf{1}_{I_k} = \sum_{k,l} c_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l},$$

$$\sigma = \sum_l d_l \mathbf{1}_{J_l} = \sum_{k,l} d_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}$$

ou seja, $s, \sigma$ são representadas usando a mesma partição.

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de Darboux para funções escada.

**Proposição 1.** *Sejam $s, \sigma \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções escada. Então*

*(1) (linearidade) $s+\sigma$ é uma função escada e*

$$\int_a^b (s+\sigma) = \int_a^b s + \int_a^b \sigma.$$

*Se $c \in \mathbb{R}$ então $c\, s$ é uma função escada e*

$$\int_a^b cs = c \int_a^b s\,.$$

*(2) (positividade) Se $s \ge 0$ então $\displaystyle\int_a^b s \ge 0$.*

*(3) (monotonicidade) Se $s \le \sigma$ então $\displaystyle\int_a^b s \le \int_a^b \sigma$.*

*(4) Se $E$ é um conjunto elementar, então*

$$\int_a^b \boldsymbol{1}_E = m(E).$$

*Demonstração.* (1) Começamos com a aditividade. Pela observação anterior, existe uma partição $\{I_1, \dots, I_n\}$ tal que

$$s = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{I_j},$$

$$\sigma = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{I_j},$$

$$\text{logo } s+\sigma = \sum_{j=1}^n (a_j+b_j) \mathbf{1}_{I_j}.$$

Portanto $s+\sigma$ é uma função escada e

$$\begin{aligned}\int_a^b (s+\sigma) &= \sum_{j=1}^n (a_j+b_j)\,|I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n a_j |\,I_j| + \sum_{j=1}^n b_j\,|I_j| = \int_a^b s + \int_a^b \sigma\,.\end{aligned}$$

Vamos deixar as provas das outras afirmações como exercícios e mostrar apenas o item (4).

Seja $E = I_1 \sqcup ... \sqcup I_n \subset [a,b]$ um conjunto elementar, representado como uma união finita de intervalos disjuntos. Então $[a,b] \setminus E$ também é elementar e seja

$$[a,b] \setminus E = J_1 \sqcup ... \sqcup J_m$$

sua representação como união finita de intervalos disjuntos.

Dessa forma, $\{I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m\}$ é uma partição de $[a,b]$ e

$$\mathbf{1}_E = 1 \cdot \mathbf{1}_{I_1} + \cdots + 1 \cdot \mathbf{1}_{I_n} + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_m}\,.$$

Então $\mathbf{1}_E$ é uma função escada e

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{1}_E &= 1 \cdot |I_1| + \cdots + 1 \cdot |I_n| + 0 \cdot |J_1| + \cdots + 0 \cdot |J_m| \\ &= |I_1| + ... + |I_n| = \mathrm{m}(E)\,.\end{aligned}$$

$\square$

**Definição 9.** Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ um função limitada. Considere todas as funções escada $s \leq f$ e $\sigma \geq f$. Definimos

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b s(x)dx\colon s \leq f \text{ função escada}\right\}$$

a integral de Darboux inferior de $f$ e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \sigma(x)dx\colon \sigma \geq f \text{ função escada}\right\}$$

a integral de Darboux superior de $f$.

Claramente, $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

**Definição 10.** Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é chamada de Darboux integrável se

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Neste caso, o valor comum dais integrais superior e inferior, denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou até por $\displaystyle\int f$ é chamado a integral de Darboux de $f$.

Uma caracterização simples e muito útil da integrabilidade à Darboux é dada pela seguinte proposição, cuja prova deixamos como exercício.

**Proposição 2.** *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Darboux integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem duas funções escada $s$ e $\sigma$ tais que $s \leq f \leq \sigma$ e*

$$\int_a^b (\sigma - s) < \varepsilon.$$

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de Darboux.

**Proposição 3.** *Sejam $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções e seja $c \in \mathbb{R}$.*

*(1) (linearidade) Se $f_1, f_2$ são integráveis à Darboux, então $f_1 + f_2$ e $cf_1$ também são e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2,$$
$$\int_a^b (cf_1) = c\int_a^b f_1.$$

*(2) (positividade) Se $f_1$ é integrável à Darboux e $f_1 \geq 0$ então $\displaystyle\int_a^b f_1 \geq 0$.*

*(3) (monotonicidade) Se $f_1, f_2$ são integráveis à Darboux e $f_1 \leq f_2$ então $\displaystyle\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.*

*(4) Um conjunto $E \subset [a,b]$ é Jordan mensurável se, e somente se, sua função indicadora $\boldsymbol{1}_E$ é Darboux integrável. Neste caso, $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{1}_E = \mathrm{m}(E)$.*

*Demonstração.* A segunda parte do item (i) e os itens (ii) e (iii) são deixados como exercícios.

Vamos provar a aditividade da integral. Como $f_1, f_2$ são Darboux integráveis, dado $\varepsilon > 0$, existem $s_i, \sigma_i$, $i = 1, 2$ funções escada tais que $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$ e $\displaystyle\int \sigma_1 - \int s_i < \varepsilon$. Segue que $s_1 + s_2$ e $\sigma_1 + \sigma_2$ são funções escada e

$$s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2 \,.$$

Além disso,

$$\int \big((\sigma_1 + \sigma_2) - (s_1 + s_2)\big) = \int (\sigma_1 - s_1) + \int (\sigma_2 - s_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

então pela proposição anterior a função $f_1 + f_2$ é integral à Darboux.

Como $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$, $i = 1, 2$, pela definição da integral de Darboux temos que

$$\int s_i \leq \int f_i \leq \int \sigma_i,$$

então

$$\int s_1 + \int s_2 \leq \int f_1 + \int f_2 \leq \int \sigma_1 + \int \sigma_2 \tag{10}$$

Como $s_i \leq f_i \leq \sigma_1, i = 1, 2$ tem-se $s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2$, então, de novo pela definição da integral de Darboux,

$$\int (s_1 + s_2) \leq \int (f_1 + f_2) \leq \int (\sigma_1 + \sigma_2). \tag{11}$$

Mas $s_1, s_2$ e $\sigma_1, \sigma_2$ são funções escada, para as quais a aditividade da integral de Darboux já foi estabelecida, então

$$\int s_1 + \int s_2 = \int (s_1 + s_2)$$
$$\int \sigma_1 + \int \sigma_2 = \int (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Junto com (10) e (11) isso implica

$$\left| \int f_1 + \int f_2 - \int (f_1 + f_2) \right| \leq \left| \int (\sigma_1 + \sigma_2) - \int (s_1 + s_2) \right| \leq 2\varepsilon,$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, prova a aditividade da integral.

Vamos provar o item (4). Seja $E \subset [a, b]$ um conjunto Jordan mensurável. Dado $\varepsilon > 0$, existem $A \subset E \subset B$ tais que $A, B$ são elementares e $\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) < \varepsilon$.

Segue que $\mathbf{1}_A$ e $\mathbf{1}_B$ são funções escada, $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_B$,

$$\int \mathbf{1}_A \leq \int \mathbf{1}_E \leq \int \mathbf{1}_B,$$
$$\text{e} \quad \int \mathbf{1}_B - \int \mathbf{1}_A = \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) < \varepsilon.$$

Portanto, pela caracterização da integrabilidade à Darboux na Proposição 2, $\mathbf{1}_E$ é Darboux integrável. Além disso, como $A \subset E \subset B$, tem-se $\mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(B)$, então

$$\left| \int \mathbf{1}_E - m(E) \right| \leq \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon$ é arbitrário, concluímos que $\displaystyle\int \mathbf{1}_E = \mathrm{m}(E)$.

Agora suponha que $\mathbf{1}_E$ seja integrável à Darboux. Vamos provar que $E$ é Jordan mensurável.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $s \le \mathbf{1}_E \le \sigma$ funções escada, tais que $\displaystyle\int \sigma - \int s < \varepsilon$.

Escrevemos $s = \displaystyle\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{I_k}$, $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^n d_k \mathbf{1}_{I_k}$, e seja $\mathcal{N}_1 := \{k \colon c_k > 0\}$.

Observe que se $k \in \mathcal{N}_1$ então $I_k \subset E$ e $c_k \le 1$. De fato, dado $x \in I_k$,

$$0 < c_k = s(x) \le \mathbf{1}_E(x),$$

logo $\mathbf{1}_E(x)$ deve ser igual a 1 (a função indicadora de um conjunto só toma o valor 0 ou 1), monstrando que $x \in E$ e $c_k \le 1$.

Seja $A := \displaystyle\bigsqcup_{k \in \mathcal{N}_1} I_k$. Então $A$ é um conjunto elementar e $A \subset E$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A) = \sum_{k \in \mathcal{N}_1} |I_k| &= \sum_{k \in \mathcal{N}_1} \mathbf{1} \cdot |I_k| \\ &\ge \sum_{k \in \mathcal{N}_1} c_k \, |I_k| \\ &\ge \sum_{k=1}^n c_k \, |I_k| \, | = \int s, \end{aligned}$$

já que $c_k \le 0$ para todo $k \notin \mathcal{N}_1$.

Portanto $A$ é um conjunto elementar com $A \subset E$ e $\mathrm{m}(A) \ge \displaystyle\int s$.

Agora consideremos a função escada $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^n d_k \mathbf{1}_{I_k}$, onde $\sigma \ge \mathbf{1}_E \ge 0$, portanto $d_k \ge 0$ para todo $k$. Sejam

$$\mathcal{N}_2 := \big\{k \colon I_k \cap E \neq \emptyset\big\}$$

e $B := \displaystyle\bigsqcup_{k \in \mathcal{N}_2} I_k$. Então $B$ é um conjunto elementar e $E \subset B$.

Além disso, se $k \in \mathcal{N}_2$ temos que $E \cap I_k \neq \emptyset$. Então existe $x \in E \cap I_k$ e assim

$$1 = \mathbf{1}_E(x) \le \sigma(x) = d_k,$$

mostrando que neste caso $d_k \ge 1$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(B) = \sum_{k \in \mathcal{N}_2} |I_k| &= \sum_{k \in \mathcal{N}_2} 1 \cdot |I_k| \\ &\le \sum_{k \in \mathcal{N}_2} d_k \, |I_k| \\ &\le \sum_{k=1}^n d_k |I_k| = \int \sigma. \end{aligned}$$

Portanto $B$ é um conjunto elementar com $E \subset B$ e $\mathrm{m}(B) \le \displaystyle\int \sigma$.

Segue que $A \subset E \subset B$ onde $A, B$ são conjuntos elementares e

$$\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A) \le \int \sigma - \int s < \varepsilon,$$

portanto, $E$ é Jordan mensurável. $\square$

### 4.3. A equivalência entre a integral de Riemann e a integral de Darboux.

**Teorema 5.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, $f$ é integrável à Riemann se e somente se $f$ é integrável à Darboux. Neste caso, $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.*

*Demonstração.* $\boxed{\mathcal{R} \implies \mathcal{D}:}$ Seja $\epsilon > 0$. Como $f$ é integrável à Riemann, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ e para toda escolha de pontos intermediários $x_1^\star \in I_1$, $x_2^\star \in I_2$, ..., $x_n^\star \in I_n$, se $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, então a soma de Riemann correspondente satisfaz

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^\star)\,|I_k| - \mathcal{I}(f) \right| < \epsilon\,,$$

ou seja

$$\mathcal{I}(f) - \epsilon < \sum_{k=1}^n f(x_k^\star)\,|I_k| < \mathcal{I}(f) + \epsilon\,. \tag{12}$$

Denotando por

$$m_k := \inf\{f(x)\colon x \in I_k\}$$
$$M_k := \sup\{f(x)\colon x \in I_k\}$$

e definindo as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^n m_k\,\mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^n M_k\,\mathbf{1}_{I_k}\,,$$

tem-se

$$s \le f \le \sigma$$

e

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^n m_k\,|I_k|\,, \qquad \int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^n M_k\,|I_k|\,. \tag{13}$$

Tomando em (12) o ínfimo (e depois o supremo) em cada intervalo $I_k$ sobre todos os pontos intermediários $x_k^* \in I_k$, obtemos o seguinte:

$$\mathcal{I}(f) - \epsilon \le \sum_{k=1}^n m_k\,|I_k| \le \sum_{k=1}^n M_k \le |I_k|\,\mathcal{I}(f) + \epsilon\,,$$

então, usando (13),

$$\mathcal{I}(f) - \epsilon \le \int_a^b s \le \int_a^b \sigma \le \mathcal{I}(f) + \epsilon\,.$$

Portanto,

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \le (\mathcal{I}(f) + \epsilon) - (\mathcal{I}(f) - \epsilon) = 2\epsilon\,,$$

mostrando que $f$ é integrável à Darboux.

$\boxed{\mathcal{D} \implies \mathcal{R}:}$ Sem perda de generalidade, podemos supor que $f \ge 0$. De fato, como $f$ é limitada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $-K \le f \le K$. Então, $f + K \ge 0$, e uma vez estabelecida a integrabilidade à Riemann de $f + K$, a de $f$ segue imediatamente.

Assim, suporemos a partir de agora que $0 \le f(x) \le K$ para todo $x \in [a,b]$. Fixe $\epsilon > 0$.

Como $f$ é integrável à Darboux, existem duas funções escada $s$ e $\sigma$ tais que

$$s \le f \le \sigma \quad \text{e} \quad \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon\,.$$

Como $f \geq 0$, sua a aproximação por baixo $s$ também pode ser escolhida tal que $s \geq 0$. Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k \, \mathbf{1}_{I_k}, \quad c_k \geq 0$$
$$\sigma = \sum_{k=1}^{N} d_k \, \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\delta := \min \left\{ |I_k| \, , k = 1, \dots, N, \, \frac{\epsilon}{N^2 \, K} \right\} .$$

Considere uma partição qualquer $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ com $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pontos intermediários $x_l^\star \in J_l$, para todo índice $l = 1, \dots, m$ e soma de Riemann correspondente

$$\sum_{l=1}^{m} f(x_l^\star) \, |J_l| \, .$$

Dado um índice $l \in \{1, \dots, m\}$, há duas possibilidades sobre o intervalo correspondente $J_l$:

- Existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \subset I_k$. Neste caso, chamamos o índice $l$ "bom".
- Não existe tal intervalo $I_k$. Neste caso, chamamos o índice $l$ "ruim".

Vamos considerar primeiro o caso ruim. Como $\{I_1, \dots, I_k\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \cap I_k \neq \emptyset$. Mas como $J_l \not\subset I_k$, necessariamente $J_l$ contém um ponto extremo do intervalo $I_k$ (e também intersecta um outro intervalo $I_{k'}$). Já que

$$|J_l| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta < |I_k| \, ,$$

segue que $J_l$ contém exatamente um ponto extremo de um único intervalo $I_k$, com $k \in \{1, \dots, N\}$. Portanto,

$$\# \{ l \in \{1, \dots, m\} \colon J_l \text{ é ruim } \} \leq N \tag{14}$$
$$\sum_{l \colon \text{ruim}} |J_l| \leq N \, \delta \, . \tag{15}$$

Então, a parte da soma de Riemann correspondente aos índices ruins tem a cota

$$0 \leq \sum_{l \colon \text{ruim}} f(x_l^\star) \, |J_l| \leq N \, K \, \delta < \epsilon, \tag{16}$$

ou seja, tem uma contribuição pequena.

A seguir, vamos estimar a parte da soma de Riemann correspondente aos índices bons. Para fazer isso, note que se $x_l^\star \in J_l \subset I_k$, então, como $s \leq f \leq \sigma$, segue que

$$c_k = s(x_l^\star) \leq f(x_l^\star) \leq \sigma(x_l^\star) = d_k \, .$$

Começamos com a estimativa por cima:

$$\begin{aligned} \sum_{l \colon \text{bom}} f(x_l^\star) \, |J_l| &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l \colon J_l \subset I_k} f(x_l^\star) \, |J_l| \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{l \colon J_l \subset I_k} d_k \, |J_l| \\ &= \sum_{k=1}^{N} d_k \sum_{l \colon J_l \subset I_k} |J_l| \leq \sum_{k=1}^{N} d_k \, |I_k| = \int_a^b \sigma \, . \end{aligned}$$

Portanto, usando (16), concluímos que

$$\sum_{l=1}^{m} f(x_l^\star)\,|J_l| = \sum_{l\colon \text{bom}} f(x_l^\star)\,|J_l| + \sum_{l\colon \text{ruim}} f(x_l^\star)\,|J_l| \le \int_a^b \sigma + \epsilon\,. \tag{17}$$

A estimativa por baixo é similar, porém, mais sútil.

Note que dado qualquer $k \in \{1, \dots, N\}$, como $\{J_l \colon l = 1, \dots, m\}$ é uma partição de $[a, b]$, tem-se $I_k \subset [a, b] = \bigcup_{l=1}^m J_l$, então

$$\begin{aligned} I_k = \bigcup_{l=1}^{m} (I_k \cap J_l) &= \bigcup_{l\colon J_l \subset I_k} (I_k \cap J_l) \cup \bigcup_{l\colon J_l \cap I_k \neq \emptyset,\ J_l \not\subset I_k} (I_k \cap J_l) \\ &\subset \bigcup_{l\colon J_l \subset I_k} J_l \cup \bigcup_{l\colon \text{ruim}} J_l\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|I_k| \le \sum_{l\colon J_l \subset I_k} |J_l| + \sum_{l\colon \text{ruim}} |J_l| \le \sum_{l\colon J_l \subset I_k} |J_l| + N\,\delta\,,$$

onde a última desigualdade segue de (15).

Concluímos que

$$\sum_{l\colon J_l \subset I_k} |J_l| \ge |I_k| - N\delta\,. \tag{18}$$

Note também que $c_k \le K$, já que todo $c_k$ é um valor da função $s$, e $s \le f \le K$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{m} f(x_l^\star)\,|J_l| &\ge \sum_{l\colon \text{bom}} f(x_l^\star)\,|J_l| \qquad (\text{já que } f \ge 0) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l\colon J_l \subset I_k} f(x_l^\star)\,|J_l| \ge \sum_{k=1}^{N} \sum_{l\colon J_l \subset I_k} c_k\,|J_l| \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l\colon J_l \subset I_k} |J_l| \ge \sum_{k=1}^{N} c_k\,(|I_k| - N\delta) \qquad (\text{usando (18)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k\,|I_k| - \sum_{k=1}^{N} c_k N\delta = \int_a^b s - N\delta \sum_{k=1}^{N} c_k \\ &\ge \int_a^b s - N^2\delta K > \int_a^b s - \epsilon\,. \end{aligned}$$

Concluímos, junto com a estimativa por cima (17) que

$$\int_a^b s - \epsilon < \sum_{l=1}^{m} f(x_l^\star)\,|J_l| < \int_a^b \sigma + \epsilon\,.$$

Por outro lado, como $s \le f \le \sigma$, tem-se

$$\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b \sigma\,.$$

Portanto,

$$\left| \sum_{l=1}^{m} f(x_l^\star)\,|J_l| - \int_a^b f \right| < \left( \int_a^b \sigma + \epsilon \right) - \left( \int_a^b s - \epsilon \right) = \left( \int_a^b \sigma - \int_a^b s \right) + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Isso mostra que $f$ é integrável à Riemann e $\mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_a^b f$. $\square$

A partir de agora, nos referiremos aos dois conceitos (equivalentes) de integração acima coma a integral de Riemann-Darboux.

A proposição seguinte estabelece de maneira precisa, a bem conhecida interpretação geométrica da integral à Riemann como área de uma região.

**Proposição 4.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, e suponha que $f \geq 0$. Considere a região planar abaixo do gráfico de $f$ e acima do eixo $x$:*

$$E := \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b] \quad e \quad 0 \leq t \leq f(x)\big\} .$$

*Se $f$ é integrável à Riemann-Darboux, então $E$ é mensurável à Jordan (em $\mathbb{R}^2$) e*

$$\mathrm{m}(E) = \int_a^b f .$$

*Demonstração.* Dado $\epsilon > 0$, sejam $0 \leq s \leq f \leq \sigma$ funções escada tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon .$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \,\mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \,\mathbf{1}_{I_k},$$

onde $d_k \geq c_k \geq 0$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a,b]$.

Para cada índice $k$, considere as caixas em $\mathbb{R}^2$

$$Q_k := I_k \times [0, c_k], \quad \text{e} \quad R_k := I_k \times [0, d_k] ,$$

e os conjuntos elementares em $\mathbb{R}^2$

$$A := \bigcup_{k=1}^N Q_k, \quad \text{e} \quad B := \bigcup_{k=1}^N R_k .$$

Como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$A \subset E \subset B .$$

Note que

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^N c_k \, |I_k| = \sum_{k=1}^N |Q_k| = \mathrm{m}(A)$$

e similarmente,

$$\int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \, |I_k| = \sum_{k=1}^N |R_k| = \mathrm{m}(B) .$$

Segue que

$$\int_a^b s = \mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(B) = \int_a^b \sigma , \tag{19}$$

portanto,

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) - \mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon ,$$

o que mostra a mensurabilidade à Jordan do conjunto $E$.

Além disso, como $s \le f \le \sigma$, temos que $\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b \sigma$, e junto com (19),

$$\left| \mathrm{m}(E) - \int_a^b f \right| \le \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon \,,$$

mostrando que $\mathrm{m}(E) = \int_a^b f$. □

**Exercício 4.** Seja $\{f_n\}_{n\ge 1}$ uma sequência de funções integráveis à Riemann-Darboux em $[a, b]$. Suponha que

$$f_n \to f \qquad \text{uniformemente.}$$

Prove que o limite uniforme $f$ também é integrável à Riemann-Darboux e

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,.$$

Use a versão de Darboux do conceito de integrabilidade.

No que segue, exploraremos a relação entre a continuidade e a integrabilidade de uma função.

**Teorema 6.** *Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é continua, então $f$ é integrável à Riemann-Darboux.*

*Demonstração.* Como $f$ é contínua e $[a, b]$ é compacto, $f$ é, automaticamente, limitada.

Além disso, $f$ é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a, b]$,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \,. \tag{20}$$

Podemos expressar (20) de forma equivalente como segue. Dado qualquer intervalo $I$ no domínio da função $f$, definimos a *oscilação* de $f$ em $I$ por

$$\omega_f(I) := \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| = \sup_I f - \inf_I f \,.$$

Então (20) é equivalente ao seguinte: dado $I \subset [a, b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) < \epsilon \,.$$

Considere uma partição $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$ tal que $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, e sejam

$$m_k := \inf_{x\in I_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k := \sup_{x\in I_k} f(x) \,.$$

Defina as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^N m_k I_k \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^N M_k I_k \,.$$

Então, $s \le f \le \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) = \sum_{k=1}^N (M_k - m_K) \, |I_k| = \sum_{k=1}^N \omega_f(I_k) \, |I_k| \;.$$

Dado qualquer índice $k \in \{1, \dots, N\}$, como $|I_k| \le \Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pela continuidade uniforme (20) de $f$, temos que $\omega_f(I_k) < \epsilon$. Portanto,

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon \sum_{k=1}^N |I_k| = \epsilon(b - a) \,,$$

o que estabelece a integrabilidade à Darboux da função $f$. □

**Comentário 2.** E se a função $f$ tiver um (ou um número finito de) ponto(s) de descontinuidade, ele ainda é integrável (supondo que seja limitada)?

Seja $x_0 \in [a,b]$ e suponha que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seja limitada e contínua em $[a,b] \setminus \{x_0\}$. Com uma pequena modificação, o argumento anterior ainda é aplicável neste cenário. É suficiente isolar o ponto de descontinuidade $x_0$ em um intervalo suficientemente pequeno.

De fato, sejam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \le f \le M$, fixe $\epsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < \frac{\epsilon}{M-m}$. Então, $f$ é contínua em $I_1 := [a, x_0 - \delta]$ e em $I_2 := [x_0 + \delta, b]$. Pelo teorema anterior, existem funções escada $s_j \le f \le \sigma_j$ em $I_j$, $j = 1, 2$, tais que

$$\int_{I_j} (\sigma_j - s_j) < \epsilon\,.$$

Vamos definir duas funções escada em $[a,b]$ como segue:

$$s := \begin{cases} s_1 & \text{em } I_1 \\ s_2 & \text{em } I_2 \\ m & \text{em } (x_0-\delta, x_0+\delta) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma := \begin{cases} \sigma_1 & \text{em } I_1 \\ \sigma_2 & \text{em } I_2 \\ M & \text{em } (x_0-\delta, x_0+\delta)\,. \end{cases}$$

Evidentemente, $s \le f \le \sigma$. Além disso,

$$\int_a^b (\sigma - s) = \int_{I_1} (\sigma - s) + \int_{I_2} (\sigma - s) + (M - m)\, |(x_0-\delta, x_0+\delta)| < 3\epsilon\,,$$

provando assim a afirmação de que $f$ é integrável à Riemann-Darboux.

O mesmo argumento é aplicável no caso de uma função com um número finito de pontos de descontinuidade. Um argumento similar, mas um pouco mais elaborado pode ser usado para tratar o caso de um conjunto de pontos de descontinuidade com medida de Jordan nula.

**Exercício 5.** Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tenha medida de Jordan zero. Prove que $f$ é integrável à Riemann-Darboux.

### 4.4. O teorema de Lebesgue (continuidade v. integrabilidade à Riemann-Darboux).

O tópico principal desta aula é o teorema de Lebesgue sobre a relação entre a integrabilidade à Riemann-Darboux de uma função e sua continuidade. Mostraremos que uma função limitada é integrável à Riemann-Darboux se e somente se for contínua exceto por um conjunto “negligenciável”de pontos de descontinuidade.

Começamos com a definição formal do conceito de conjunto negligenciável.

Lembre-se que um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$ possui medida de Jordan nula se e somente se a sua medida exterior de Jordan for zero, ou seja, se $\mathrm{m}^{\star,J}(E) = 0$. Equivalentemente, escrevemos: para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar $B \supset E$ tal que $\mathrm{m}(B) \le \epsilon$.

Portanto, $E$ tem medida de Jordan zero se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número *finito* de intervalos $I_1, \ldots, I_N$ satisfazendo

$$E \subset \bigcup_{n=1}^N I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^N |I_n| \le \epsilon\,.$$

Exemplos importantes de conjuntos com medida de Jordan zero são conjuntos finitos ou o conjunto de Cantor.

Vamos estender esse conceito para uma família maior de conjuntos. A maneira natural (e, na verdade, padrão na teoria da medida) para obter tal extensão é substituir processos finitos por processos *enumeráveis*.

**Definição 11.** Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é dito "negligenciável", ou de medida (de Lebesgue) zero se para todo $\epsilon > 0$ existir uma família *enumerável* de intervalos $\{I_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon \,.$$

O conjunto vazio é um intervalo, então tais famílias enumeráveis de intervalos incluem também famílias finitas de intervalos. Assim, todo conjunto com medida de Jordan zero é, automaticamente negligenciável.

Além disso note que caso $E$ seja negligenciável e $F \subset E$, então $F$ também é negligenciável.

**Exemplo 4.** Todo conjunto enumerável é negligenciável.

De fato, seja $E := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável e fixe $\epsilon > 0$.

A seguir, é apresentado um primeiro exemplo do uso do "truque $\frac{\epsilon}{2^n}$". Esta técnica, em suas várias manifestações, será usada repetidamente ao longo do curso.

Para cada índice $n \geq 1$, considere o intervalo

$$I_n := \left( x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, \, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right) \,.$$

Então, obviamente,

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \,,$$

mostrando que $E$ é negligenciável.

Em particular, note que o conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ é negligenciável, enquanto, como mostrado anteriormente, não é mensurável à Jordan (e, por isso, não possui medida de Jordan zero).

**Exercício 6.** Prove que uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis é negligenciável. Use o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$.

**Comentário 3.** Se for necessário, os intervalos $I_n, n \geq 1$ sempre podem ser escolhidos *abertos.*

De fato, sejam $E$ um conjunto negligenciável, e $\epsilon > 0$. Existe uma cobertura $I_n, n \geq 1$ de $E$ por intervalos, tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon \,.$$

Supondo que os pontos extremos do intervalo $I_n$ sejam $a_n$ e $b_n$, e usando o mesmo truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, considere os intervalos abertos

$$J_n := \left( a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, \, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right) \,.$$

Então, para todo $n \geq 1$,

$$|J_n| = |I_n| + \frac{\epsilon}{2^n},$$

portanto

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq 2\epsilon \,.$$

O mesmo argumento também mostra que os intervalos $I_n, n \geq 1$ podem ser escolhidos todos fechados, ou todos semiabertos, caso seja útil.

**Observação 5.** Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto *compacto.* Então, $E$ é negligenciável se e somente se $E$ possui medida de Jordan zero.

Em outras palavras, enquanto, em geral, ter medida de Jornal zero é uma propriedade mais forte, no caso de subconjuntos compactos, os dois conceitos são equivalentes.

Seja $\epsilon > 0$, e escolha uma cobertura $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de $E$ por intervalos *abertos*, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon\,.$$

Como $E$ é compacto, existe uma subcobertura *finita* $I_1, \dots, I_N$ de $E$, e, evidentemente,

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon\,.$$

**Definição 12.** Uma propriedade $P(x)$ vale em *quase todo ponto* (abreviado q.t.p.) se o conjunto

$$\{x \colon P(x) \;\text{ não vale}\}$$

for negligenciável.

**Exemplo 5.** Considere o conjunto $E := \left\{\frac{1}{n} \colon n \geq 1\right\}$ e a sua função indicadora $\mathbf{1}_E \colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Observe que os pontos de descontinuidade da função $\mathbf{1}_E$ são exatamente $0$ e $\frac{1}{n}, n \geq 1$, ou seja, um conjunto enumerável de pontos. Portanto, $\mathbf{1}_E$ é contínua em q.t.p.

**Teorema 7** (de Lebesgue)**.** *Seja $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, $f$ é integrável à Riemann-Darboux se e somente se $f$ é contínua em q.t.p.*

Antes de começar a demonstração do teorema, vamos estudar o conceito de *oscilação* de uma função, que é relacionado à sua continuidade.

**A oscilação de uma função.** Seja $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

**Definição 13.** Se $I \subset [a,b]$ é um intervalo, definimos a *oscilação de $f$ em $I$* por

$$\begin{aligned}\omega_f(I) &:= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\} \\ &= \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)\,.\end{aligned}$$

Observe que $I \subset J \implies \omega_f(I) \leq \omega_f(J)$.

**Definição 14.** Se $x \in [a,b]$, definimos a *oscilação de $f$ no ponto $x$* por

$$\omega_f(x) := \inf\{\omega_f(I)\colon I \ \text{ intervalo aberto com } \ x \in I\}\,.$$

Como a oscilação depende monotonicamente do intervalo, temos que

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} \omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right)\,.$$

**Exercício 7.** Prove que $f$ é uniformemente contínua se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dado um intervalo $I \subset [a,b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) < \epsilon\,.$$

Além disso, prove que $f$ é contínua no ponto $x$ se e somente se $\omega_f(x) = 0$.

Em consequência, $x$ é um ponto de descontinuidade de $f$ se e somente se $\omega_f(x) > 0$.

Esta caracterização nos permite *quantificar* a descontinuidade de uma função em um ponto, ou seja, medir quão descontinua $f$ é no ponto $x$, dependendo de quão grande seja a oscilação pontual $\omega_f(x)$.

Considere

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \{x\colon \omega_f(x) > 0\}$$

o conjuntos dos pontos de descontinuidade da função $f$.

Dado $r > 0$, definimos

$$\mathcal{D}_r := \{x\colon \omega_f(x) \geq r\}$$

o conjunto de pontos com uma "quantidade (ou nível) de descontinuidade"acima de $r$.

Observe que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_{1/n}\,.$$

**Lema 3.** *Para todo $r > 0$, o conjunto $\mathcal{D}_r$ é fechado e, portanto, compacto.*

*Demonstração.* Seja $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}_r$ uma sequência tal que $x_n \to x$. Provaremos que $x \in \mathcal{D}_r$.

Suponha por contradição que $x \notin \mathcal{D}_r$, ou seja, $\omega_f(x) < r$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right) < r\,.$$

Como $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ tal que $x_N \in (x-\delta, x+\delta)$. Ademais, existe um intervalo aberto $J$ contendo $x$, e suficientemente pequeno tal que $J \subset (x-\delta, x+\delta)$. Portanto,

$$\begin{aligned} r \leq \omega_f(x_N) &= \inf\{\omega_f(I)\colon I \ \text{ intervalo aberto com } \ x_N \in I\} \\ &\leq \omega_f(J) \leq \omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right) < r\,,\end{aligned}$$

e temos uma contradição. $\square$

Estamos aptos a começar a prova do resultado principal dessa aula.

*Demonstração do Teorema 7.* $\boxed{\Longleftarrow}$ Suponha que $\mathcal{D}$ seja negligenciável, e tome $\epsilon > 0$.

Escolha um nível de descontinuidade $r > 0$ pequeno, $r < \frac{\epsilon}{b-a}$ será suficiente. Como $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_r$ também é negligenciável. A ideia da prova é *isolar* os pontos com nível de descontinuidades acima ou igual a $r$ em intervalos pequenos, e usar o resto do espaço, onde a oscilação de $f$ é zero ou muito baixa para construir aproximações por funções escada, e, portanto, provar a integrabilidade de $f$.[1]

Pelo Lema 3, $\mathcal{D}_r$ é compacto, e pela Observação 5 existe uma cobertura finita por intervalos (que podem ser escolhidos disjuntos)

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{n=1}^N I_n \quad \text{com} \quad \sum_{n=1}^N |I_n| < \frac{\epsilon}{M-m}\,,$$

onde $m := \inf f$ e $M := \sup f$.

O complemento dessa cobertura pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos

$$[a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n =: J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_m\,.$$

Portanto, para cada índice $k = 1, \ldots, m$, e para todo $x \in J_k$, a oscilação pontual de $f$ satisfaz $\omega_f(x) < r$. Isso não necessariamente implica a mesma estimativa para a oscilação de $f$ no intervalo $J_k$ inteiro; porém, existe uma partição finita do intervalo $J_k$ em intervalos menores para os quais a oscilação permanece abaixo de $r$, como mostra o seguinte lema .

**Lema 4.** *Seja $J = [c,d]$ um intervalo e suponha que $\omega_f(x) < r$ para todo $x \in J$. Então, existe uma partição $J = J^1 \sqcup \ldots \sqcup J^p$ em intervalos satisfazendo*

$$\omega_f(J^i) < r \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, p\,.$$

*Prova do lema.* Usaremos um argumento simples de compacidade. Para cada $x \in J$, como $\omega_f(x) < r$, existe $\delta_x > 0$ tal que, denotando por $I_x := (x - \delta_x, x + \delta_x)$, temos que $\omega_f(I_x) < r$.

A família $\{I_x\}_{x \in J}$ é uma cobertura finita por intervalos abertos do compacto $J$, portanto existe uma subcobertura finita $I_{x_1}, \ldots, I_{x_q}$.

Resta “tornar disjuntos”esses intervalos, o que pode ser obtido por meios já familiares. Por exemplo, escrevendo

$$[a,b] = ([a,b] \cap I_{x_1}) \sqcup ([a,b] \cap I_{x_2} \setminus I_{x_1}) \sqcup \ldots \sqcup \left([a,b] \cap I_{x_q} \setminus (I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_{q-1}})\right)\,,$$

[1](28 de março de 2020) Aliás, esta é a estratégia usada para a contenção do novo coronavírus pelos países que tiveram mais sucesso nessa luta (por exemplo na Coreia do Sul).

Considere a analogia “pessoas infectadas $\rightsquigarrow$ pontos de descontinuidades”.

Com um número finito (isto é, relativamente pequeno) de pessoas infectadas, as autoridades públicas podem tomar medidas de isolamento *local*, em pequenas quadras contendo infectados (e suspeitos de ser infectados devido à proximidade física). A vida pode continuar relativamente normal para o resto da cidade (ou do país). Mas com um número alto de infecções e um padrão de transmissão desconhecido, a alternativa é considerar todos potencialmente suspeitos de infecção, e, portanto, isolar a cidade inteira (ou o país inteiro).

No caso do nosso teorema, temos uma informação crucial: o conjunto de pontos de descontinuidade é bem pequeno, negligenciável. Portanto, isolamento local desses pontos funcionará, eventualmente garantindo a integrabilidade da função.

Infelizmente, por causa, pelo menos em parte, da falta total de *dados* sobre a distribuição das pessoas infectadas em países como Brasil (ou EUA), também por causa de outros problemas de ordem estrutural no sistema de saúde—tudo isso devido a uma falta crônica de preparação, à negação da análise científica, das recomendações apresentadas com *antecedência* por organizações de saúde respeitáveis, ou seja, por uma atitude irresponsável, então, criminal dos mais responsáveis para o bem público—hoje a solução restante é isolamento amplo (ou quase total).

segue que cada conjunto da união disjunta acima pode ser particionado em um número finito de subintervalos disjuntos $J^i$. Cada um destes subintervalos está contido em um determinado intervalo $I_{x_l}$, portanto, $\omega_f(J^i) \le \omega_f(I_{x_l}) < r$. $\square$

Voltando à demonstração do teorema, pelo lema anterior, e pelo isolamento em intervalos pequenos dos pontos de descontinuidade de $f$, temos uma partição de $[a,b]$ em intervalos

$$\{K_1, \dots, K_p;\, I_1, \dots, I_N\}$$

tais que

$$\omega_f(K_l) < r \quad \text{para todo } \; l = 1, \dots, p$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| < \frac{\epsilon}{M-m}\,.$$

Dentamos por

$$m_l := \inf_{x \in K_l} f(x) \quad \text{e} \quad M_l := \sup_{x \in K_l} f(x)$$

e definimos duas funções escada em $[a,b]$ como segue:

$$s(x) := \begin{cases} m_l & \text{se } x \in K_l,\ l = 1, \dots, p \\ m & \text{se } x \in I_j,\ j = 1, \dots, N \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma(x) := \begin{cases} M_l & \text{se } x \in K_l,\ l = 1, \dots, p \\ M & \text{se } x \in I_j,\ j = 1, \dots, N\,. \end{cases}$$

Claramente $s \le f \le \sigma$ e temos

$$\begin{aligned} \int_a^b (\sigma - s) &= \sum_{l=1}^{p} (M_l - m_l)\,|K_l| + \sum_{j=1}^{N} (M-m)\,|I_j| \\ &= \sum_{l=1}^{p} \omega_f(K_l)\,|K_l| + (M-m) \sum_{j=1}^{N} |I_j| \\ &\le r \sum_{l=1}^{p} |K_l| + (M-m)\,\frac{\epsilon}{M-m} \le r\,(b-a) + \epsilon \le 2\epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a integrabilidade à Riemann-Darboux de $f$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponha que $f$ seja integrável à Riemann-Darboux. Como $\mathcal{D} = \bigcup_{n \ge 1} \mathcal{D}_{1/n}$, basta provar que $\mathcal{D}_r$ é negligenciável para todo $r > 0$.

Fixe $r > 0$. Como $\mathcal{D}_r$ é compacto, isso equivale a provar a existência de uma família finita de intervalos $\{I_k\}_{k \in \mathcal{F}}$ (onde $\mathcal{F}$ é um conjunto finito de índices) satisfazendo

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon.$$

Como a função $f$ é integrável à Darboux, então existem duas funções escada $s$ e $\sigma$ tais que $s \le f \le \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon\, r\,. \tag{21}$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^{N} d_k\, \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $c_k \le d_k$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a,b]$.

Seja

$$\mathcal{F} := \left\{ k \in \{1, \dots, N\} \colon \mathcal{D}_r \cap \mathring{I}_k \neq \emptyset \right\} .$$

Como $\mathcal{D}_r \subset [a, b] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_N$, temos que

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \cup \mathcal{N},$$

onde $\mathcal{N}$ é o conjunto finito (portanto, negligenciável) dos pontos extremos dos intervalos $I_k$.

Resta provar que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon \,.$$

Fixe $k \in \mathcal{F}$ e seja $x \in \mathcal{D}_r \cap \mathring{I}_k$. Então, $\omega_f(x) \geq r$ e, ademais,

$$\omega_f(x) = \inf \left\{ \omega_f(J) \colon x \in J, \ J \text{ aberto } \right\} \leq \omega_f(\mathring{I}_k) = \sup_{\mathring{I}_k} f - \inf_{\mathring{I}_k} f \leq d_k - c_k \,,$$

onde a última desigualdade vale porque $x \in \mathring{I}_k$, então

$$\sup_{\mathring{I}_k} f \leq \sup_{\mathring{I}_k} \sigma = d_k \quad \text{ e } \quad \inf_{\mathring{I}_k} f \geq \inf_{\mathring{I}_k} s = c_k \,.$$

Concluímos que

$$k \in \mathcal{F} \implies d_k - c_k \geq r \,.$$

Portanto, usando (21)

$$\begin{aligned} \epsilon r > \int_a^b (\sigma - s) &= \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| + \sum_{k \notin \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| \geq \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| \\ &\geq r \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| \ , \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon \,,$$

terminando assim a prova do teorema. □