A MEDIDA DE LEBESGUE

SILVIUS KLEIN

Sumário

Introduzimos o conceito de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, um refinamento da medida de Jordan.

1. A medida de Lebesgue exterior

Lembre-se do conceito de medida de Jordan exterior. Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto limitado, então

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf\{\mathrm{m}(B) \colon E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Se E é ilimitado, podemos também definir sua medida de Jordan exterior como $+\infty$.

Como um conjunto elementar é uma união finita de caixas, concluímos que

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{N} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n, \text{ onde } B_1, \dots, B_N \text{ são caixas}\right\}. \tag{1}$$

Em outras palavras, a medida de Jordan exterior de E é o custo ínfimo necessário para cobrir E por um número *finito* de caixas.

Como já mencionamos, ao fim de generalizar alguns conceitos clássicos, trocamos processos finitos por processos enumeráveis, um procedimento padrão na teoria da medida.

Definição 1. Dado um conjunto qualquer $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^d$, definimos sua *medida exterior de Lebesgue* por

$$m^*(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } \{B_n\}_{n\ge 1} \text{ são caixas}\right\},$$

isto é, o custo ínfimo necessário para cobrir E por uma união *enumerável* de caixas.

Observação 1. Note que $0 \le m^*(E) \le +\infty$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$.

Além disso, "pagando mais um ϵ", as caixas B_n na definição anterior podem ser escolhidas todas *abertas* (ou todas fechadas, ou todas semi fechadas).

Definição 2. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é chamado *negligenciável* se $m^*(E) = 0$.

Note que E é negligenciável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma família de caixas (todas abertas, ou todas fechadas, ou todas semi fechadas) tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon.$$

Exemplo 1. $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

De fato, considere uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^n$ por caixas abertas: $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_n$.

Para cada $t > 0$, o cubo $[0,t]^d$ é um compacto coberto pelas caixas abertas $\{B_n \colon n \geq 1\}$. Então existe uma subcobertura finita, ou seja, existe $N < \infty$ tal que $[0,t]^d \subset \bigcup_{n=1}^N B_n$.

Concluímos que para todo $t > 0$ tem-se

$$t^d = \mathrm{m}\left([0,t]^d\right) \leq \sum_{n=1}^N |B_n| \leq \sum_{n=1}^\infty |B_n| \,,$$

então, tomando t indo para ∞,

$$\sum_{n=1}^\infty |B_n| = \infty.$$

Como a escolha da cobertura enumerável do espaço $\mathbb{R}^d$ por caixas foi arbitrária, segue que $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Exemplo 2. $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$, onde m_2^* refere-se à medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$, e a reta real é vista como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R} \equiv \{(x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, considere as caixas

$$B_n := [-n, n] \times \left[-\frac{\epsilon}{2n\,2^n}, \frac{\epsilon}{2n\,2^n}\right], \quad n \geq 1\,.$$

Então,

$$|B_n| = \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \quad \mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^\infty |B_n| = 2\epsilon,$$

portanto, $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$.

Exemplo 3. Todo conjunto enumerável tem medida exterior de Lebesgue zero.

De fato, seja

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}$$

um conjunto enumerável.

Como um singleton é uma caixa (trivial), com volume zero, segue que

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^\infty |\{x_n\}| = 0.$$

Proposição 1. *(os "axiomas"da medida exterior de Lebesgue)*

(i) *(conjunto vazio)* $m^*(\emptyset) = 0$.

(ii) *(monotonicidade) Se* $E \subset F$ *então* $m^*(E) \leq m^*(F)$.

(iii) *(sub aditividade enumerável) Seja* $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ *uma família enumerável de conjuntos. Então,*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty m^*(E_n)\,. \tag{2}$$

Demonstração. As primeiras duas afirmações são evidentes. Vamos provar a terceira.

Se um dos conjuntos E_n tem medida exterior $+\infty$, então a desigualdade (2) é óbvia (o lado direito seria igual a $+\infty$). Então, vamos supor que $m^*(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\epsilon > 0$. Vamos criar mais um ϵ de folga; também usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, já que estamos lidando com uma família enumerável de conjuntos.

Para cada $n \geq 1$ existe uma família enumerável $\{B_n^k\}_{k\geq 1}$ de caixas tal que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n^k \quad \text{ e } \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|B_n^k\right| < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,k\geq 1} B_n^k\,,$$

que é uma família enumerável de caixas, e

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n,k\geq 1} \left|B_n^k\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|B_n^k\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \epsilon\,.$$

Como ϵ é arbitrário, a desigualdade (2) é satisfeita. □

O próximo resultado mostra a relação entre as medidas exterior e interior de Jordan, e a medida exterior de Lebesgue.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Então,*

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq m^*(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E)\,.$$

Demonstração. A segunda desigualdade acima é óbvia: $m^*(E)$ é o custo ínfimo total de todas as coberturas enumeráveis (então, inclusive finitas) por caixas, enquanto $m^{\star,J}(E)$ é o ínfimo do custo total das coberturas finitas.

Vamos estabelecer a primeira desigualdade. Seja $\epsilon > 0$. Então existe um conjunto elementar e compacto (por quê?) $K \subset E$ tal que

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon. \tag{3}$$

Considere qualquer família $\{B_n\}_{n\geq 1}$ de caixas abertas tal que $E \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Então $\{B_n\}_{n\geq 1}$ é uma cobertura aberta do conjunto compacto K, e por isso, existe $N < \infty$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Segue que

$$\mathrm{m}(K) \leq \sum_{k=1}^{N} |B_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n|\ .$$

Portanto,

$$m_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n| + \epsilon\,,$$

e tomando o ínfimo sobre todas as famílias de caixas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ que cobrem E, concluímos o seguinte:

$$m_{\star,J}(E) \leq m^*(E) + \epsilon\,,$$

o que implica a desigualdade desejada, já que ϵ é arbitrário. □

2. Conjuntos mensuráveis à Lebesgue: definição, exemplos

Existem várias definições (equivalentes) do conceito de mensurabilidade à Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Escolhemos a definição mais direta, via o "primeiro princípio de Littlewood", que nos permite chegar mais rapidamente a resultados fundamentais sobre a estrutura do espaço de tais conjuntos.

Definição 3. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *mensurável à Lebesgue* se E é "quase aberto", no sentido que para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto aberto U tal que $U \supset E$ e $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.

Vamos comparar este conceito com o conceito de mensurabilidade à Jordan.

Exercício 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto Jordan mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar e aberto U (ou seja, uma união *finita* de caixas abertas) tal que $U \supset E$ e $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$.

Portanto, usando esse exercício, se E é Jordan mensurável, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $U \supset E$ elementar e aberto tal que $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$. Mas pelo Lema 1, $m^*(U \setminus E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$, mostrando que E é quase aberto, isto é, Lebesgue mensurável. O contrário *não* é verdade (como veremos em breve).

Além disso, de novo pelo Lema 1,

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq m^*(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E)\,,$$

e como E é mensurável à Jordan, $\mathrm{m}_{\star,J}(E) = \mathrm{m}^{\star,J}(E) = m(E)$.

Concluímos que um conjunto mensurável à Jordan E também é mensurável à Lebesgue e

$$m(E) = m^*(E),$$

ou seja, a medida de Jordan de E é igual a sua medida exterior de Lebesgue.

Portanto, obtemos uma extensão de um conceito mais básico substituindo um processo finito por um enumerável.

Para um conjunto *mensurável* à Lebesgue, chamaremos sua medida exterior $m^*(E)$ simplesmente de sua medida (de Lebesgue), e usaremos a notação simplificada $\mathrm{m}(E)$ (os comentários acima garantem a consistência desta terminologia e notação).

Observação 2. Todo conjunto aberto é, obviamente, mensurável à Lebesgue.

Observação 3. Todo conjunto negligenciável (isto é, com medida exterior de Lebesgue zero) é mensurável à Lebesgue. Em particular, todo subconjunto de uma conjunto negligenciável é mensurável. Ademais, todo conjunto enumerável é mensurável.

De fato, dados $E \subset \mathbb{R}^d$ com $m^*(E) = 0$ e $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável de caixas abertas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Então, $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é aberto, $U \supset E$ e como $U \setminus E \subset U$,

$$m^*(U \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,,$$

mostrando que E é quase aberto.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de conjuntos mensuráveis à Lebesgue que não são mensuráveis à Jordan.

Exemplo 4. O conjunto $E := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ é enumerável, então, pela observação anterior é mensurável à Lebesgue. Por outro lado, como já vimos, não é mensurável à Jordan, apesar de ser limitado.

Exemplo 5. O exemplo anterior é, de certa forma, trivial. Na verdade, existem conjuntos topologicamente mais interessantes que são Lebesgue mas não Jordan mensuráveis. Vamos construir um tal conjunto aberto (e limitado) e a seguir um compacto.

A ideia é "engrossar"o conjunto

$$E := \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

do exemplo anterior.

De fato, para cada $n \geq 1$, considere o intervalo aberto

$$I_n := \left(q_n - \frac{r}{2^n}, q_n + \frac{r}{2^n}\right) ,$$

onde $0 < r < \frac{1}{2}$ é uma constante. Defina

$$U := \bigcup_{n \geq 1} I_n .$$

Então, U é aberto (e em particular, Lebesgue mensurável) e claramente limitado, por exemplo $U \subset [-1,2]$, mas não é Jordan mensurável. De fato, temos

$$\mathrm{m}^{\star,J}(U) = m^{\star,J}(\overline{U}) \geq m^{\star,J}(\overline{E}) = m^{\star,J}([0,1]) = 1,$$

enquanto, por outro lado temos

$$\mathrm{m}_{\star,J}(U) \leq m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2r < 1 \leq \mathrm{m}^{\star,J}(U) ,$$

então $\mathrm{m}^{\star,J}(U) \neq \mathrm{m}_{\star,J}(U)$.

Ademais, seja $K := [-1,2] \setminus U$. Então K é um conjunto compacto, portanto Lebesgue mensurável (ainda não provamos isso, vamos aceitá-lo por enquanto). Por outro lado, K não pode ser Jordan mensurável, pois, caso contrário, $U = [-1,2] \setminus K$ seria Jordan mensurável também.

Comentário 1. Uma pergunta natural é por que não definir o conceito de mensurabilidade à Lebesgue seguindo exatamente o mesmo padrão do conceito de mensurabilidade à Jordan, considerando um conceito de medida interior.

Vamos *tentar* a seguir esse caminho, definindo, analogamente à medida interior de Jordan, a medida interior de Lebesgue de um conjunto E por

$$\mathrm{m}_\star(E) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : \{B_n\}_{n \geq 1} \text{ caixas, } \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset E \right\} ,$$

e a mensurabilidade de E pelo fato de que as suas medidas exterior $m^*(E)$ e interior $\mathrm{m}_\star(E)$ sejam iguais.

Considere o conjunto

$$F := [0,1] \setminus \mathbb{Q} .$$

Este conjunto *deveria* ser mensurável, como diferença de dois conjuntos mensuráveis (um intervalo é um conjunto enumerável). Mas, como F não contém intervalos, sua medida interior $\mathrm{m}_\star(F) = 0$, enquanto, por outro lado, sua medida exterior deve ser $m^*(F) = 1$. Isto é porque, como $F \subset [0,1] \subset F \cup \mathbb{Q}$, temos

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*(F) + m^*(\mathbb{Q}) = m^*(F) \leq 1.$$

Portanto, essa abordagem não funciona com sucesso. Uma explanação mais especulativa é que o espaço euclidiano possui subconjuntos densos *enumeráveis*, então trocando processos finitos por processos enumeráveis abre amplamente as portas, permitindo a entrada de conjuntos muito mais gerais, cuja medida interior não capta bem seus tamanhos.

A partir de agora, salvo indicação ao contrário, mensurabilidade se refere a mensurabilidade por Lebesgue.

. . .
A ser continuado ...