MAT2833 - TÓPICOS DE ANÁLISE REAL

❑ Objetivo do curso

A disciplina tem por objetivo familiarizar os estudantes com tópicos mais avançados de teoria da medida, que não são normalmente lecionados em um curso de medida e integração de um semestre.
Listamos alguns de tais tópicos: medidas de Radon e o teorema de Riesz-Markov; a métrica de Wasserstein no espaço de probabilidades; esperança condicional e martingales; a função maximal de Hardy-Littlewood e o teorema de diferenciação de Lebesgue; diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas; o teorema ergódico; medida e dimensão de Hausdorff; a fórmula da área e da co-área; medida de Haar.
O curso será útil para alunos que estejam se especializando em análise e EDP, teoria ergódica e até mesmo teoria das probabilidades, além de ser um curso de cultura geral e, portanto, interessante para qualquer aluno de pós graduação com suficiente maturidade matemática.

❑ Pré-requisitos

Medida e integração.
Algum conhecimento prévio de análise funcional e de teoria das probabilidades também seria útil.

❑ Professor

Silvius Klein
silviusk [arroba] mat [ponto] puc-rio [ponto] br

❑ Aulas

Segundas e quartas das 17h às 19h, via Zoom.

❑ Avaliação

Listas de exercícios.
Apresentação de um seminário.

❑ Bibliografia

[Stein] Elias M. Stein & Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces,* Princeton Lectures in Analysis, vol III, Princeton University Press.

[Evans] Lawrence Craig Evans & Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* CRC Press.

[Schlag] Camil Muscalu & Wilhelm Schlag, *Classical and Multilinear Harmonic Analysis,* vol I, Cambridge University Press.

[Tao] Terence Tao, *An Introduction to Measure Theory,* AMS.

[Villani] Cédric Villani, *Optimal Transport: Old and New,* Springer.

[Viana] Marcelo Viana & Krerley Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, SBM.

[Halmos] Paul Halmos, *Measure Theory,* Springer.

❑ Ementa do curso

1. O teorema de representação de Riesz-Markov
    - 1.1. Espaços de Hausdorff localmente compactos
    - 1.2. Medidas de Radon
    - 1.3. O teorema de Riesz-Markov
    - 1.4. Convergência fraca

[Evans] Cap. 1.8 e 1.9, [Halmos] Cap. X

2. O espaço de medidas de probabilidades
    - 2.1. A topologia fraca*
    - 2.2. Teorema Portmanteau
    - 2.3. A metrizabilidade da topologia fraca* (métrica de Levy-Prohorov)
    - 2.4. A distância de Wasserstein e suas propriedades

[Viana] Cap. 2, [Villani] Cap I.6

3. Elementos de teoria das probabilidades
    3.1. Indepedência
    3.2. Somas de variáveis independentes
    3.3. Tempos de parada
    3.4. Esperança condicionada
    3.5. Martingales, o teorema de convergência de Doob

[Schlag] Cap. 5, [Halmos] Cap. IX

4. O teorema fundamental do cálculo (parte 1) para a integral de Lebesgue
    4.1. O lema da cobertura de Vitali
    4.2. A função maximal de Hardy-Littlewood
    4.3. O teorema de diferenciação de Lebesgue
    4.4. Pontos de densidade de Lebesgue; conjunto de Lebesgue de uma função localmente integrável
    4.5. Aproximação da identidade

[Stein] Cap. 3.1 e 3.2

5. O teorema fundamental do cálculo (parte 2) para a integral de Lebesgue
    5.1. Funções de variação limitada
    5.2. O lema do sol nascente
    5.3. Diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas
    5.4. Comprimento de curvas retificáveis

[Stein] Cap. 3.3 e 4, [Tao] Cap. 1.6

6. O teorema ergódico (via funções maximais)
    6.1. Transformações que preservam medida, médias temporais
    6.2. O teorema ergódico médio
    6.3. O teorema ergódico maximal
    6.4. O teorema ergódico de Birkhoff
    6.5. Medidas ergódicas

[Stein] Cap. 6.5

7. Medida e dimensão de Hausdorff
    7.1. Medida de Hausdorff
    7.2. Dimensão de Hausdorff; exemplos; auto similaridade
    7.3. Fórmula da área e da co-área

[Stein] Cap. 7.1 e 7.2, [Evans] Cap. 3

8. Medida de Haar* (sujeito à disponibilidade de tempo)
    8.1. Existência da medida de Haar
    8.2. Unicidade da medida de Haar
    8.3. Regularidade da medida de Haar

[Halmos], Cap. XI, XII